Análisis Matemático III
Trabajos Prácticos

Carlos Peña Ana Paula Madrid

Cursada 2017

Índice

1. Trabajo Práctico N° 1: Números complejos

1. Hallar números reales a y b tales que:

   a) $3+4i = 2a+5-bi$ b) $\frac{9}{2}+b-3i = 3i\,(a-b)$

2. Encuentrar la suma, diferencia, producto y cociente de los siguientes pares de números complejos:

   a) $1+i$, i c) $2-i$, $3+i$ e) $3-2i$, $4+i$

   b) $4+5i$, $3+2i$ d) $2+i$, $2-i$ f) $3+4i$, $1-2i$

3. Realizar las operaciones y expresar los resultados en la forma $x+iy$

   a) $(3+4i)+(1+2i)$ d) $\mathrm{Im}\,[(3+4i)\,(1-2i)]$ g) $(1-i)^2$

   b) $(3+4i)\,(1-2i)$ e) $(3-4i)\,(3-4i)\,(3+4i)\,(3+4i)$ h) $i^2\,(1+i)^3$

   c) $(1+2i)\,(1-2i)\,(3+4i)$ f) $(1+2i)\,(1+i)\,(1+3i)$ i) $\dfrac{2+i}{3-i}-\dfrac{4+i}{1-2i}$

4. Dados los números complejos $z=1+i$; $w=-1+i$, calcular: $z+w$; $z\bar{w}$; $\bar{z}/w$; $z\bar{z}$; w^2.

5. Sea z un número complejo cualquiera, probar que:

   a) $\mathrm{Re}(iz) = -\,\mathrm{Im}\,z$ b) $\mathrm{Re}\,z = \mathrm{Im}(iz)$

   c) $\mathrm{Re}(z^2) = (\mathrm{Re}\,z)^2 - (\mathrm{Im}\,z)^2$ d) $\mathrm{Im}\,z^2 = 2\,(\mathrm{Re}\,z)\,(\mathrm{Im}\,z)$

6. En las siguientes ecuaciones, x e y son números reales. Hallar los valores de x e y

   a) $i\,(x+iy) = x+1+i2y$ c) $(x+iy)^2 = 0+i$
   b) $x^2-y^2+i2xy = -ix+y$ d) $\sqrt{x^2+y^2} = 1-2x+iy$

7. Calcular los valores numéricos de las siguientes expresiones. Escribir las respuestas en la forma $x+iy$.

   a) $\frac{2+i}{1-i}+\frac{2-i}{1+i}+i$ c) $\left[\frac{1+i}{1-i}\right]^3$
   b) $\left[(1+i)+\frac{1}{1+i}\right]^2$ d) $\left[\frac{2+i}{3+4i}-\frac{2i}{3-4i}\right]^2$

8. Sean $z_1 = x_1+iy_1$ y $z_2 = x_2+iy_2$ verificar que:

   a) $\overline{(z_1-z_2)} = \overline{z_1}-\overline{z_2}$

   b) $\overline{(z_1.z_2)} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

   c) $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}$

   d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

9. Determinar el módulo de cada una de los siguientes expresiones:

   a) $3+4i$ c) $(3+4i)\,(1+2i)\,i$
   b) $\frac{(3+4i)(1+i)}{3-4i}$ d) $i+\frac{(3+4i)(1+i)}{3-4i}$

10. ¿Cuál de los siguientes enunciados son verdaderos para dos números complejos cualesquiera?

    a) $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}z+\operatorname{Re}w$

    b) $\operatorname{Re}zw = \operatorname{Re}z.\operatorname{Re}w$

    c) $\operatorname{Im}(z-w) = -\operatorname{Im}(w-z)$

    d) $\operatorname{Im}\left[(z-w)^2\right] = -\operatorname{Im}\left[(w-z)^2\right]$

    e) $\operatorname{Re}(\alpha z) = \alpha\operatorname{Re}z,\ \alpha\in\mathbb{R}$

11. Dados $z = x+iy,\ w\in\mathbb{C}$, probar:

    a) $|x|\,,|y| \leq |z| \leq |x|+|y|$

    b) $|z+w| \leq |z|+|w|$

    c) $||z|-|w|| \leq |z-w|$

    d) $|z+1| > |z-1| \Longleftrightarrow \operatorname{Re}z > 0$

    e) $\operatorname{Im}z > 0e\operatorname{Im}w > 0 \Longrightarrow \left|\dfrac{z-w}{z-\bar{w}}\right| < 1$

    f) Sean $a,z\in\mathbb{C}$ tales que $|z|<1y\,|a|<1$.Probar que$\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1$

12. Hallar el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

    a) $3+4i$ d) i^3+2
    b) $-4i$ e) $\sqrt{3}+i$
    c) $4(\cos 30^o + i\,\mathrm{sen}\,30^o)$ f) $-\sqrt{3}-i$

13. Efectuar las operaciones indicadas:

a) $(1-i)^{-1}$ b) $3e^{i\pi/4}.(1+i)$ c) $|2+i|-|1-i|\,i+i$

14. Escribir las siguientes expresiones en la forma $x+iy$.

a) $i^{3/4}$ c) $(-1-i)^3$ e) $(1-i)^{-1/3}$

b) $(1+i)^{5/2}$ d) $(1-i)^{1/2}$ f) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{-1/3}$

15. Determinar todas las raíces de los polinomios:

a) $x^3+2=0$ c) $x^3+ix^2+2x=0$ e) $z^n-1(n\in\mathbb{N})=0$

b) $x^2+x+i=0$ d) $x^6-2x^3+2=0$ f) $x^4-2\sqrt{3}x^2+4=0$

16. Sea $m\neq 0$ un entero. Sabemos que $z^{\frac{1}{m}}$ tiene m valores y que $z^{-\frac{1}{m}}$ tambien. Para z y m dados seleccionamos al azar un valor de $z^{\frac{1}{m}}$ y uno de $z^{-\frac{1}{m}}$.

a) ¿Es su producto necesariamente igual a 1?.

b) ¿Es siempre posible encontrar un valor de $z^{-\frac{1}{m}}$ tal que, para un valor de $z^{\frac{1}{m}}$ dado, se cumpla $z^{\frac{1}{m}}.z^{-\frac{1}{m}}=1$?.

17. Dado $z\in\mathbb{C}$ probar

a) z es real si y solo si $\overline{z}=z$

b) z es real o imaginario puro si y solo si $(\overline{z})^2=z^2$

18. Describa por medio de un diagrama la parte del plano complejo que corresponde a las siguientes ecuaciones o desigualdades. Diga cuáles de estos problemas no tienen solución.

a) $\mathrm{Re}\,(z)=-2$ d) $\mathrm{Im}\,(z)\geq\mathrm{Re}\,(z)$ g) $\mathrm{Re}\,(z)=3\,\mathrm{Im}\,(z)$

b) $\mathrm{Im}\,(z)\geq|z|$ e) $|z-3+2i|<4$ h) $z\overline{z}\geq 2\,\mathrm{Re}\,(z)$

c) $\mathrm{Im}\,(z)\geq\mathrm{Re}\,(z^2)$ f) $\mathrm{Im}(z+2i)=\mathrm{Re}(z-3)$ i) $|z+3-4i|\leq 0$

19. Dados los conjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por:

$$\begin{aligned}
A&=\{z\in\mathbb{C}\;/\;\mathrm{Re}\,z\geq 0\}\\
B&=\{z\in\mathbb{C}\;/\;\mathrm{Im}\,z<1\}\cup\{2i\}\\
C&=\{z\in\mathbb{C}\;/\;|z-2+i|<3\}\\
D&=\{z\in\mathbb{C}\;/\;1<|z-1|\leq 2\}\\
E&=\{z\in\mathbb{C}\;/\;0<|z-3|\leq 2\}\\
F&=\{z\in\mathbb{C}\;/\;-1<\mathrm{Re}\,(z)<1\}
\end{aligned}$$

a) Decidir cuáles de esos conjuntos son abiertos, cerrados y acotados.

b) Mostrar, si es posible, puntos que sean de acumulación y puntos aislados para cada conjunto.

20. Dados los conjuntos:

$$\begin{aligned}
A&=\{z\in\mathbb{C}\;/\;1<|z-1|\leq 2\}\\
B&=\{z\in\mathbb{C}\;/\;|z-1|=2\}\\
C&=\{z\in\mathbb{C}\;/\;1<|z-1|<2\}\\
D&=(2,3)
\end{aligned}$$

decir cuáles de los conjuntos anteriores son cerrados y abiertos relativos a A.

21. Dados los subconjuntos de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} \ / \ |\operatorname{Re} z| \leq 2\} \\ B &= \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1 \text{ ó } |z| \geq 3\} \\ C &= [-1, 1] \cup i\,[-1, 1] \\ D &= \{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

Decir intuitivamente cuáles son conexos y cuáles no.

2. Trabajo Práctico N° 2: Funciones de variable compleja y su derivada

Funciones de variable compleja

1. Sea $f(z) = \frac{(z-i)(z-1)}{z(z^2+1)}$. Decir en que punto o puntos de cada uno de los siguientes dominios no está definida $f(z)$

   a) $|z-i| < 2$ c) $|z| < 2$
   b) $0 < |z| < 0,99$ d) $|z-1| < \sqrt{2}$

2. Escribir las siguientes funciones de z en la forma $u(x, y) + iv(x, y)$, donde u y v son funciones reales de x e y:

   a) $(z-i)^2$ c) $|z|^2 + i$
   b) $z^{-1} + i$ d) $(\overline{z})^{-2} + i$

3. Probar por definición que:

   a) $\lim\limits_{z \to -i} z + i = 0$ c) $\lim\limits_{z \to 2} \dfrac{z^2 - 4}{z - 2} = 4$

   b) $\lim\limits_{z \to -i} \dfrac{z^2 + 1}{z + i} = -2i$ d) $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^3 - 1}{z - 1} = 3$

4. Justificar porqué estas funciones son continuas en $\mathbb{C}$:

   a) $f(z) = \operatorname{Im} z$ b) $f(z) = \bar{z}$ c) $f(z) = |z|$
   d) $f(z) = z^2$ e) $f(z) = |z| + x$

5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua. Probar que las siguientes funciones tambien son continuas:

   a) $\operatorname{Re} f(z)$ b) $\operatorname{Im} f(z)$ c) $|f(z)|$ d) $f(\bar{z})$

6. Analizar para qué valores de $z = x + iy$ son continuas las siguientes funciones:

   a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 - 1}{z^2 - 1} & z \neq \pm 1 \\ \frac{3}{2} & z = \pm 1 \end{cases}$

   b) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} x + i \operatorname{sen} y}{x - iy}$

   c) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+9}{z-3i} \text{ si } z \neq 3i \\ 6i \text{ si } z = 3i \end{cases}$

7. Demostrar que las siguientes funciones son continuas para $z \neq 0$. ¿Puede redefinírselas para hacerlas continuas en $z = 0$?

   $a)\ f(z) = \dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|^2}$ $\qquad b)\ f(z) = \dfrac{|z|^2}{|z|}$ $\qquad c)\ f(z) = \dfrac{(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)}{|z|^2}$

8. Sea f continua en el punto z_0. Probar que f está acotada en cierto $D(z_0, r)$.

Funciones Holomorfas

9. a) Probar que las funciones $\bar{z}$ y $|z|^2$ son continuas en todo punto.

   b) Probar que $\bar{z}$ no es derivable en ningún punto y que $|z|^2$ sólo es derivable en $z = 0$.

   c) Analizar la derivabilidad de $\overline{z} \operatorname{Re} z$.

   d) Hallar puntos de derivabilidad y holomorfía de las siguientes funciones:

   $f_1(z) = x^2 + iy^2;\qquad f_2(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

10. Determinar en que región del plano son analíticas las siguientes funciones. Decir cuáles de ellas son funicones enteras. Si la función posee derivada sobre un dominio, encuentre una expresión para $f\prime(z)$ y evalúe $f\prime\,(1+i)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } & f(z) = 2z^2 + 3 \\ \text{b) } & f(z) = z + z^{-1} \\ \text{c) } & f(z) = -xy + \tfrac{i}{2}(x^2 - y^2) \\ \text{d) } & f(z) = (y+1)^2 + i\,(x+1)^2 \end{aligned}$$

11. Probar que las siguientes funciones satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

    a) $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y)$

    b) $f(z) = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i \operatorname{sen} 2xy)$

    c) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

12. Sea $f(z) = u + iv$, si u y v se expresan en términos de las coordenadas polares (r, θ)

    a) Mostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden expresarse en la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}; \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}; \quad r \neq 0.$$

    b) Verificar que la función $f(z) = r^5(\cos 5\theta + i \operatorname{sen} 5\theta)$, satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en la forma polar para todo $z \neq 0$.

    c) ¿En que región del plano complejo son analíticas las siguientes funciones? Usar la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\text{a) } r\cos\theta + ir \qquad \text{b) } r^4 \sin(4\theta) - ir^4\cos(4\theta)$$

13. Hallar los puntos de holomorfía de las siguientes funciones:

    a) $f(z) = z^2$

    b) $f(z) = z\overline{z}$

    c) $f(z) = (y+1)^2 + i\,(x+1)^2$

14. Dada $f(z)$ holomorfa en un dominio D, probar que $f(z) = u(z)+iv(z)$ se reduce a una constante en cada uno de los siguientes casos:

   a) Si $\bar{f}(z)$ es holomorfa.
   b) Si $u.v$ es constante.
   c) Si $u = v^2$.
   d) Si $u^2 = v^2$.
   e) Si $|f(z)|$ es constante.

15. Demostrar que si $f(z)$ es analítica en z_0 y $g(z)$ no es analítica en z_0 entonces $h(z) = f(z)+g(z)$ no es analíca en z_0.

16. Supongamos que $f(z)$ es analítica y distinta de cero en z_0 y que $g(z)$ no es analítica en z_0. Demostrar que $h(z) = f(z).g(z)$ no es analítica en z_0.

17. Usar la regla de L´Hôpital para evaluar los siguientes límites:

   a) $\lim_{z\to 1} \frac{(z-1)+\left(z^2-1\right)}{z^{16}-1}$ b) $\lim_{z\to i} \frac{z^9+z-2i}{z^{15}+i}$

18. Sea $u(x,y) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1$. verificar que u es armónica y encontrar la conjugada armónica $v\,(x,y)$.

19. Determinar para qué valores de z la expresión $x^4 - y^3$ satisface la ecuación de Laplace. ¿Porqué esta función no es armónica?.

20. Determinar dos valores de k para los cuales $\cos x\left[e^y + e^{ky}\right]$ sea armónica.

21. Hallar el polinomio armónico más general de la forma $Ax^2 + By^2 + Cx^2y + Dxy^2$.

22. Analizar si las siguientes funciones son armónicas y, en caso afirmativo, calcular su conjugada armónica.

   a) $x + y$ *b*) $\dfrac{y}{x^2+y^2}$ *c*) $\operatorname{sen} x \cosh y$ *d*) $xy^3 + x^2$

23. Demostrar que u es armónica en cierto dominio y encontrar una armónica comjugada v cuando:

   a) $u(x,y) = 2x(1-y)$
   b) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
   c) $u(x,y) = \sinh x \sin y$

24. Determinar los valores de k tal que $f(x,y) = k^2x^2y - 3y^3$ sea armónica. Hallar entonces la conjugada armónica g de f.

25. Sean u y v funciones armónicas, ¿qué puede decirse de $u+v$ y de $u.v$?

26. Probar que si u es la función conjugada armónica de v, entonces son armónicas:

   a) $u.v$ *b*) $e^u \cos v$ *c*) $\operatorname{sen} u \cosh v$

27. Sea $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, donde r y θ son las variables polares comunes.

a) Sea $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ una función analítica en un dominio que no contiene a $z = 0$ y además f tiene derivadas parciales segundas continuas. Mostrar que en este dominio, u y v satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

que es la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

b) Mostrar que $u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$ es una función armónica.

c) Encuentrar la función $v(r,\theta)$ conjugada armónica de $u(r,\theta)$, y muestre que también satisface la ecuación de Laplace en todo el plano.

3. Trabajo Práctico N° 3: Funciones especiales.

Función exponencial

Tener en cuenta que se ha adoptado para toda la práctica la nomenclatura $\exp z = e^z$.

1. Escribir las siguientes expresiones en la forma $x + iy$, donde x e y son números reales

   a) e^{3+4i} b) $e^{-3}e^{4i}$ c) e^{i}

2. Mostrar que

   a) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$; *b*) $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$
   c) $\exp(z + \pi i) = -\exp z$; *d*) $\exp(\frac{2+\pi i}{4}) = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$.

3. Demuestrar que $e^z = 0$ no tiene solución en el plano complejo.

4. Encuentrar todos los números complejos $z = x + iy$ que satisfacen:

   a) $e^{2z} = -1$; *b*) $e^{iz} = 2$; *c*) $e^{iz} = -1$. *d*) $e^z = 1$

5. Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ probar que $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$.

6. Expresar las siguientes funciones en la forma $u(x,y) + iv(x,y)$, donde u y v son funciones reales.

   a) e^{z^2}; *b*) $e^{z+z^{-1}}$ *c*) $e^{1/\bar{z}}$

7. Determinar $f\prime(1+i)$ si $f(z)$ está dado por $\exp(\exp z)\,; \exp(z + z^{-1})$.

8. ¿En qué regiones del plano se satisfacen las siguientes ecuaciones?

   $|e^z| = 1$; $\left|e^{z^2}\right| = 1$; $\left|\exp(\frac{z-1}{z})\right| = 1$

9. En las siguientes regiones, ¿cuáles son los valores máximos y mínimos que puede tomar $|e^z|$? Expresar que puntos de la región corresponden a estos valores.

   a) $|z - (1+i)| \le 1$ b) $|z + i| \le 3$

10. El módulo de la expresión

$$P = 1 + e^{i\psi} + e^{i2\psi} + ... + e^{i(N-1)\psi} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\psi}$$

es importante en un gran número de problemas en que intervienen N elementos físicos idénticos (por ejemplo, antenas o altavoces) que emiten radiación. Aquí, ψ corresponde a una cantidad real que depende de la separación de los elementos y de la posición del observador de la radiación. $|P|$ indica la cantidad de la radiación observada.

a) Usando la fórmula de la suma de la serie geométrica, demuestrar que.

$$|P(\psi)| = \left|\frac{\operatorname{sen} N\psi/2}{\operatorname{sen}\psi/2}\right|.$$

b) Calcular $\lim_{\psi\to 0} |P(\psi)|$.

c) Graficar con algun medio electrónico $|P(\psi)|$ para $0 \le \psi \le 2\pi$ cuando $N = 3$.

Funciones trigonométricas

11. Expresar cada número en la forma $x + iy$:

a) $\operatorname{sen} i$;	*d*) $\cos(-i)$;	*g*) $\cosh(-i)$;
b) $\sin(1-2i)$	*e*) $\cos(e^{1+i})$	*h*) $\operatorname{tg} 2i$
c) $\cos(2+i)$	*f*) $\operatorname{tg}(e^i)$	*i*) $\operatorname{senh}(1+\pi i)$

12. Mostrar que:
$\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$
$\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

13. Demostrar:

a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

b) $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$

c) $\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z$

d) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

14. Probar que las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ no son acotadas.

15. Verificar que $\operatorname{sen} z - \cos z = 0$ tiene soluciones únicamente para valores reales de z. Determinar dichas soluciones.

16. Encontrar los ceros de las funciones $\sin z$ y $\cos z$

17. Probar que, si $z = x + iy$:

a) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \ \cosh y + i \cos x \ \operatorname{senh} y$;

b) $\cos z = \cos x \ \cosh y - i \operatorname{sen} x \ \operatorname{senh} y$.

18. Verificar las siguientes propiedades:

a) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$

b) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.

19. ¿En que regiones del plano complejo no son analiticas las siguientes funciones?

$$f(z) = \frac{1}{\cos(iz)} \qquad\qquad g(z) = \frac{1}{\sinh z - \cosh z}$$

Funciones hiperbólicas

20. Demostrar los siguientes resultados:

    a) $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \ \cos y + i \cosh x \ \operatorname{sen} y$

    b) $\cosh z = \cosh x \ \cos y + i \operatorname{senh} x \ \operatorname{sen} y$

    c) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

    d) $\operatorname{senh}(z + 2\pi i) = \operatorname{senh} z$ y $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$.

21. Verificar que:
    $e^z = \cosh z + \operatorname{senh} z$
    $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$

22. Encontrar los ceros de $\operatorname{senh} z$ y de $\cosh z$.

23. Demostrar los siguientes resultados:

    a) $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$

    b) $|\cosh z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y = \cosh^2 x - \operatorname{sen}^2 y$.

24. ¿En que regiones del plano complejo no es analitica la siguiente función?

$$f(z) = \frac{1}{\sinh\left[(1+i)\, z\right]}$$

Logaritmo complejo

25. Encontrar los valores de las expresiones dadas:

    a) $\log i$; *d*) $\log(-1)$; *g*) $(1+i)^{1+i}$.
    b) $\exp(i\pi/3)$; *e*) $\log(1 + i\sqrt{3})$; *h*) $\operatorname{senh}(1+i)$.
    c) $\left(\sqrt{3} + i\right)^{4-3i}$; *f*) $(\tan 2 + i)^i$; *i*) $10^{\cosh(1+i)}$.

26. Resolver las siguientes ecuaciones:

    a) $e^z = e^{2+i}$; *b*) $(e^z - 1)^2 = e^{2z}$. *c*) $e^{4z} + e^{2z} + 1 = 0$

27. Demostrar que si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{Re}\left(\log(1 + e^{i\theta})\right) = \log\left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$, si $e^{i\theta} \neq -1$.

28. a) Considerar la identidad $\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2)$. Si $z_1 = -ie$ y $z_2 = -2$, determinar valores específicos de $\log z_1$, $\log z_2$ y $\log(z_1 z_2)$ que satisfagan esta identidad.

    b) Dados z_1 y z_2 como en el apartado a), encontrar valores específicos de $\log z_1$, $\log z_2$ y $\log(z_{1/}z_2)$ que satisfagan la identidad $\log(z_1/z_2)$=$\log z_1 - \log z_2$.

29. Considerar la identidad $\log z^n = n \log z$, donde n es un entero, que es válida para valores adecuados de los logaritmos de ambos lados de la ecuación. Sea $z = 1 + i$ y $n = 5$.

a) Encontrar valores de $\log z^n$ y $\log z$ que satisfagan la ecuación $\log z^n = n \log z$.

b) ¿Satisfacen los valores dados de z y n la identidad $\log z^n = n \log z$?

c) Suponer que $n = 2$ mientras que z permanece inalterado.¿Satisfacen estos valores la ecuación $\log z^n = n \log z$?.

30. Suponer que $f(z) = \log z = \operatorname{Log} r + i\theta,\ \ 0 \leq \theta < 2\pi$.

a) Determinar el mayor dominio de definición posible para esta función.

b) Calcular el valor numérico de $f(-e^2)$.

31. Consideremos la función logarítmica $\log z = Logr + i\theta;\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

a) ¿Cuál es, en el plano complejo, el mayor dominio en el que esta función es una rama analítica de la función logarítmica?

b) ¿Cuál es el valor numérico de $\log(-1-i)$ en esta rama?

32. Considerar la función $f(z) = \operatorname{Log}(z-i)$.

a) Describir el corte necesario para crear el mayor dominio de analiticidad posible para esta función.

b) Calcular el valor numérico de $f(-i)$

33. Determinar el mayor dominio de analiticidad para $f(z) = Log\,[z-(3+4i)]$ y calcule el valor numérico de $f(0)$

34. Demuestre que si θ es real entonces

$$\operatorname{Re}\left(\log\left(r\exp\left(i\theta\right)-1\right)\right) = \frac{1}{2} Log\left(1-2r\cos\theta + r^2\right)$$

si $r \geq 0$ y $r\exp(i\theta) \neq 1$.

35. Encuentrar los valores numéricos de cada una de las siguientes expresiones. Si el resultado es multiforme, escriba todos los valores:

$$\sinh(\log(i)) \qquad\qquad \log(\sinh(i))$$

36. Encontrar todas las raices de:

a) $\log z = \frac{\pi}{2} i$

b) $\cosh(z) = \frac{1}{2}$

c) $\sinh(z) = i$

Exponenciales Complejas

37. Determinar todos los valores de las siguientes expresiones en la forma $x + iy$

a) 1^i *c*) $(-i)^{(-i)}$ *e*) $(1+i\operatorname{tg} 2)^i$

b) $i^{\left(e^i\right)}$ *d*) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{4-3i}$ *f*) $10^{\cosh(1+i)}$

38. Evaluar

a) $f\prime(i)$ si $f(z) = z^{1/4}$ *b*) $f\prime(64)$ si $f(z) = z^{7/6}$ *c*) $f\prime(-9i)$ si $f(z) = z^{i/2}$

4. Trabajo Práctico N° 4: Integración en el campo complejo

Integracón en el campo complejo

1. Evaluar las integrales:
   $\int x\, dz \qquad \int y\, dz \qquad \int \overline{z}\, dz$
   a lo largo de las trayectorias:

   a) El segmento de recta que une 0 con $1-i$
   b) Alrededor del círculo $|z|=1$
   c) Alrededor del círculo $|z-a|=R$ con $a \in \mathbb{R}$

2. Evaluar la integral $\oint_C \bar{z}\, dz$ alrededor de:

   a) el círculo $|z-2|=3$
   b) el cuadrado con vértices en $z=0$; 2; $2i$ y $2+2i$
   c) la elipse $|z-3|+|z+3|=10$

3. Hallar el valor numérico de $\oint_C \bar{z}^2\, dz$ alrededor del círculo $|z|=1$

4. Integrar $\oint_C z\, dz$ donde C es el contorno triangular con vértices en $z=0, z=1$ y $z=1+i$

5. Hallar el valor de la integral sobre la curva C de las siguientes funciones:

   a) $5\,\mathrm{sen}\, 2z$
   b) $3\cosh{(z+2)}$

   si C es el cuadrado con vértices $1 \pm i; -1 \pm i$.

6. Considerar la expresión $I = \int\limits_0^{2+i} e^{2z} dz$ integrada sobre la recta $x=2y$. Sin llevar a cabo la integración, demostrar que $|I| \leq \sqrt{5}e^4$.

7. Considerar la expresión $I = \int\limits_1^{i} (1/\bar{z}^4)\, dz$ integrada sobre la recta $x+y=1$. Sin llevar a cabo la integración, demostrar que $|I| \leq 4\sqrt{2}$.

8. Considerar la expresión $I = \int\limits_0^{2+i} e^{z^2} dz$ integrada sobre la recta $x=2y$. Sin llevar a cabo la integración, demostrar que $|I| \leq \sqrt{5}e^3$

Teorema de Cauchy-Goursat y fórmula integral de Cauchy

9. ¿ A cuál de las siguientes integrales se aplica el teorema de Cauchy-Goursat?. Justificar la respuesta.

   a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z+2}\,dz$ *d)* $\displaystyle\oint_{|z|=\pi} \frac{dz}{1+\exp(z)}$

   b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=4} \frac{\cos z}{z+2}\,dz$ *e)* $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{1-\exp(z)}$

   c) $\displaystyle\oint_{|z+2|=2} \frac{\cos z}{z+2}\,dz$ *f)* $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{dz}{1-\exp(z)}$

   g) $\displaystyle\oint \frac{dz}{\sin z + \exp(z) - 1}$ alrededor del cuadrado de vértices en $\pm(1 \pm i)$

10. Mostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \; dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}$.(Sug.: aplicar el teorema de Cauchy a la función $f(z) = e^{-z^2}$ en el rectángulo $|x| \leq a; 0 \leq y \leq b$).

11. Probar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{a\cos t} \cos(t + a \operatorname{sen} t)\; dt = \frac{\operatorname{sen} a}{a}$ $(a > 0)$. (Sug.: integrar e^z a lo largo de la curva de Jordan en el primer cuadrante, compuesta del cuarto de círculo $|z| = a$ y de los segmentos de recta ia a 0 y de 0 a a.

12. Calcular $\int_1^i \frac{1}{z} dz$ integrando a lo largo del arco C que es la porción de $x^4 + y^4 = 1$ que se encuentra en el 1^o cuadrante.

13. Evaluar las siguientes integrales. El contorno es el cuadrado con vértices en $z = 0, 3i, 3, 3+3i$.

   a) $\displaystyle\oint \frac{dz}{z-1-i}$; *d)* $\displaystyle\oint \left(\frac{\exp(z)}{z-1-i} + \frac{1}{2-i-z}\right) dz$

   b) $\displaystyle\oint \frac{\exp(z)dz}{z+1-i}$ *e)* $\displaystyle\oint \frac{dz}{z+1+i}$;

   c) $\displaystyle\oint \frac{dz}{2z-1-i}$ *f)* $\displaystyle\oint \frac{dz}{(z+1+i)^5}$;

14. Evaluar las siguientes integrales a lo largo de la curva $y = \sqrt{x}$.

   a) $\displaystyle\int_{1+i}^{9+3i} e^{2z} dz$; *b)* $\displaystyle\int_{1+i}^{9+3i} (z^3 + z)\, dz$; *c)* $\displaystyle\int_{1+i}^{9+3i} e^z \operatorname{sen}(e^z)\, dz$.

15. Encontrar el error, en caso de que lo haya, en las siguientes integraciones. Ambas se efectúan a lo largo de la recta $y = x$. ¿Cuál es el valor correcto de estas integrales?

$$\int_0^{1+i} z\; dz = \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

$$\int_0^{1+i} \bar{z}\; dz = \frac{\bar{z}^2}{2}\Big|_0^{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i.$$

16. Para la variable real es cierto el *Teorema del valor medio*: si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, existe un número x_1, $a < x_1 < b$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_1)(b-a).$$

Comprobar, mediante el siguiente procedimiento, que este teorema no tiene equivalente para integrales de línea complejas:

a) Demostrar que $\int (1/z^2)\ dz = 1+i$, donde la integral se efectúa a lo largo de $x+y=1$.

b) Demostrar que no existe, sobre este contorno de integración, ningún punto z_1 tal que $(1/z_1^2)\,(i-1) = 1+i$.

17. Evaluar las siguientes integrales

a) $\oint \dfrac{dz}{e^z\,(z-2)}$ alrededor de $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

b) $\dfrac{1}{2\pi i}\oint \dfrac{(\cos z + \operatorname{sen} z)}{(z^2+25)\,(z+1)}\ dz$ alrededor de $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

c) $\oint \dfrac{\cosh z}{z^2+z+1} dz$ alrededor de $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

d) $\frac{1}{2\pi i}\oint \dfrac{\operatorname{senh} z}{z^2+z+1} dz$ alrededor de $|z-2i| = 2$

e) $\oint \dfrac{e^{3z}}{(z-2i)\,(z-1)} dz$ alrededor de $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$

f) $\oint \frac{\cos(2z)}{z^{20}} dz$ alrededor de $|z| = 1$

18. Evaluar la siguiente integral

$$\int_{|z+3-2i|=2} \frac{\cos z + \sin z}{z+2-2i} dz$$

19. Emplear el teorema del Valor Medio de Gauss para evaluar las siguientes integrales:

a) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\left(e^{i\theta}\right)}\ d\theta$ *b)* $\int_0^{2\pi} \cos\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\ d\theta$

Principio del Módulo Máximo

20. Sea $f(z)$ una función continua y distinta de cero en todo punto de una región cerrada y acotada D; supongamos que $f(z)$ no es constante y que es analítica en todo punto interior de D. Pruebe que el valor mínimo que $|f(z)|$ toma en D debe corresponder a un punto de D.

Sugerencia: Considerar la función $g(z) = 1/f(z)$ y recordar el teorema del módulo máximo.

21. Considerar la función $f(z) = (z+1)^2$ y la región triangular cerrada R con vértices en los puntos $z = 0$, $z = 2$ y $z = i$. Hallar puntos en R en los que $|f(z)|$ alcance sus valores máximo y mínimo. (Sug.: Interpretar $|f(z)|$ como el cuadrado de la distancia entre z y -1). Sol.: $z = 2$, $z = 0$.

22. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ continua en una región acotada R, y analítica y no constante en el interior de R. Probar que la función componente $u(x, y)$ tiene en R un valor mínimo que se alcanza en la frontera de R, nunca en el interior de R. Hallar los puntos máximos y mínimos de la parte real de la función $f(z) = e^z$ en la región $R = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \pi\}$ .Sol.: $z = 1$; $z = 1 + \pi i$.

23. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ continua en una región cerrada y acotada R, y supóngase que es analítica y no constante en el interior de R. Probar que la función componente $v(x, y)$ tiene en R valores máximo y mínimo que se alcanzan en la frontera de R y jamás en el interior donde es armónica. (Sug.: Analizar la función $g(z) = -if(z)$).

24. a) Encuentre el número de raíces de la ecuaciones dadas en el círculo unitario

    $a,1)\ z^5 + 8z + 1 = 0 \qquad a,2) z^8 - 2z^5 + z^3 - 8z^2 + 3 = 0$

    b) ¿Cuántas de las raíces están en $|z| = 2$?

25. Probar que la ecuación

    a) $2z^5 + 8z - 1 = 0$ tiene exactamente 5 raíces en $|z| \leq 2$.

    b) $e^z = z + 1$ tiene 1 raíz en $|z| \leq 1$

26. Deducir el teorema Fundamental del Álgebra a partir del teorema de Rouché.

27. Encontrar el número de raíces de $z^4 + iz^3 + 3z^2 + 2iz + 2 = 0$ que se localizan en el semiplano superior.

5. Trabajo Práctico N^o 5: Series infinitas de una variable compleja

Series de una variable compleja

1. Usar el criterio del $n-$ésimo término para demostrar que las siguientes series divergen en las regiones indicadas.

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$; cuando $|z| \geq 1$;

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)(2z)^n$, cuando $|z| \geq 1/2$;

    c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{inz}$, cuando $\operatorname{Im} z \leq 0$;

    d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}$, cuando $|z - 1| < 1$

2. Usar el criterio del cociente para demostrar que las siguientes series convergen absolutamente en los dominios indicados

    a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \exp(in^2 z)$, cuando $\operatorname{Im} z > 0$;

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}$, cuando $|z| > 0$;

    c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n$, cuando $|z| < e$;

3. Dadas las series:

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n ; \sum_{n \geq 0} e^{-nz}.$$

    decir dónde convergen y sumarlas allí.

4. Determine la suma de la serie usando un cambio de variable adecuado:

   a) $1 + (z-1)^2 + (z-1)^4 + ...$

   b) $1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^3} + ...$

5. Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$.

   Usando dicho resultado, probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n(n+1)}{2} z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^3}$

6. Analizar la convergencia uniforme de :

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(in^2 z)}{n!}$ si $|z| \leq r$ con $r < \infty$

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n+1}$ si $|z| \leq 0,99$

7. a) Demostrar que para $|z| \leq r < 1$ resulta:

   $\displaystyle\operatorname{Log} \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$

   b) Por medio de la quinta suma parcial encuentre un valor aproximado para $\operatorname{Log} 2$.

   c) Observemos que $\pi = 6 \operatorname{Im} \operatorname{Log}\left[\left(\sqrt{3}+i\right)/2\right]$. Mediante los tres primeros términos de la serie de a) evalúe aproximadamente π.

8. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^n}$; *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{z^n}{n^n}$; *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

9. Obtener los desarrollos en serie de Taylor y determinar la región de convergencia en cada caso.

   a) $\dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$ alrededor de $z = 0$

   b) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ alrededor de $z = 1$

   c) $\dfrac{1}{z^2}$ alrededor de $z = 1+i$

   d) $\dfrac{e^z}{z-2}$ alrededor de $z = 0$

   e) $\cos z$, alrededor de $z = \pi/2$

   f) $\dfrac{z-1}{(z+2)(z+3i)}$ alrededor de $z = i$

   g) $\dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$ alrededor de $z = 2$

h) $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$ alrededor de $z=2$

i) $\dfrac{e^z}{(z-2)(z+1)}$ alrededor de $z=0$

10. Usar la respuesta del ejercicio 9- h) para determinar el valor de la décima derivada de $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$ en $z=2$.

Serie de Laurent

11. Encontrar la serie de Laurent de las siguientes funciones en las regiones indicadas. Determinar el dominio más grande en el que la serie es válida

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+z-2}$ en $\begin{cases} a)\ |z|<1; & b)\ 0<|z-1|<3; \\ c)\ 0<|z+2|<3; & d)\ 1<|z|<2; \\ e)\ |z|>2; & f)\ |z+2|>3. \end{cases}$

b) $f(z)=ze^{1/z}$ en $0<|z|$

c) $f(z)=e^{(z+1)/z}$ en $0<|z|$

d) $f(z)=\dfrac{1}{z}\operatorname{sen}\dfrac{1}{z-1}$ en $0<|z-1|<1$

e) $f(z)=\dfrac{1}{z-1}\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$ en $0<|z|<1$

f) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ en $|z|>0$

g) $f(z)=z^3\cosh\dfrac{1}{z}$ en $|z|>0$

h) $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ en potencias de $z+3$

i) $f(z)=\dfrac{z}{z-i}$ en potencias de $z-1$

12. Representar $F(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$ por:

a) su serie de Laurent y describir la región de validez de las mismas;

b) su serie de Laurent en $1<|z|$.

6. Trabajo práctico N^o 6: Residuos

Residuos

1. Construir una función que tenga una singularidad evitable en $z=-1$, un polo de orden 3 en $z=0$ y una singularidad esencial en $z=1$.

2. a) Analizar singularidades y calcular los residuos correspondientes de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = \dfrac{z^3}{z^2+1}$ *b*) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3 - z}$

   c) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3}$ *d*) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)^2}$

   e) $f(z) = ze^{1/z}$ *f*) $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z}$.

   b) Qué sucede con $z = \infty$?.

3. Determinar todos los polos de las siguientes funciones y encuentre el orden de cada uno de ellos:

   a) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - 1}$ *c*) $f(z) = \dfrac{z^2+3z+2}{\sin z\,(z+1)}$

   b) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^{10}(z+1)}$ *d*) $f(z) = \dfrac{\sin 1/z}{(z+1/z)^3}$

4. Determinar los residuos de las sigientes funciones en los puntos indicados:

   a) $\dfrac{z-1}{z}e^{1/z}$ en 0 $\dfrac{e^{1/z^2}}{1-z}$ en 0

   b) $\dfrac{1}{(z+i)^5}$ en $-i$ $\dfrac{\sin z}{(z+i)^5}$ en $-i$

5. Evaluar:

   a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz$ *e*) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+z}\,dz$

   b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z+3)}$ *f*) $\displaystyle\int_{|z|=1} ze^{1/z}\,dz$

   c) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^n(z^2+1)}$ *g*) $\displaystyle\int_{|z-1|=\sqrt{5}/2} \frac{dz}{z^n(z^2+1)}$

   d) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2-1}$ *h*) $\displaystyle\int_{|z-1/2|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3+z}\,dz$.

6. Calcular

   a) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{\sinh^2 z}dz$ *c*) $\int z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz$ alrededor de $|z+1+i| = 4$

   b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z\sinh z}dz$ *d*) $\displaystyle\int \frac{\sin z + \sinh z}{z^8}dz$ alrededor de $|z| = 1$

Integrales reales

7. Probar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\operatorname{sen}\theta)^2} = \frac{-2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$ $\quad a > b \geq 0$.

8. Probar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+a}}$ $\quad a > 0$.

9. Calcular

$$a)\ \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta; \qquad c)\ \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{2-\cos\theta}d\theta$$

$$b)\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{5-4\operatorname{sen}\theta}d\theta \qquad d)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{5+4\cos^2\theta}d\theta$$

10. Probar que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n\theta\,d\theta = \begin{cases} \dfrac{n!\pi}{2^{n-1}\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

11. Calcular:

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx; \qquad b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-x+x^2}dx$$

$(Rta. \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2})$ $\qquad$ $(Rta. \frac{2}{3}\pi\sqrt{3})$

12. Probar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2a} \quad a > 0.$

13. Probar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(b^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi(1+ab)\,e^{-ab}}{2b^3} \quad a \geq 0, b > 0.$

14. Calcular

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{4+x^2}dx; \qquad b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x+x^2}dx; \qquad c)\ \int_0^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}3x}{(4+x^2)^2}dx;$$

$(Rta. \frac{1}{2}\pi e^{-6})$ $\qquad$ $(Rta. \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2})$

15. Encontrar el valor principal de Cauchy de las siguientes integrales:

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}2x}{x+4}dx\,; \qquad b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-16}dx$$

16. Probar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}\operatorname{Log} a$

17. Probar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(\operatorname{Log} a - 1)$

18. Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1+\log x}{(9+x^2)^2}dx$

19. Calcular

$$a)\ \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}dx; \qquad b)\ \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2-1)(x+3)}dx$$

$(Rta. \frac{1}{9}\pi\sqrt{3})$ $\qquad$ $(Rta. -\frac{1}{16}\left(\pi^2+\ln^2 3\right))$

7. Trabajo Práctico N^o 7: Transformaciones conformes y Continuidad Analítica

Transformaciones conformes

1. Indicar donde son conformes los siguientes mapeos

   a) $w = e^z$ $\qquad$ *c*) $w = \sin z$

   b) $w = \frac{1}{z}$ $\qquad$ *d*) $w = z^2 - z$

2. Describir la imagen de la región indicada bajo el mapeo dado

   a) El disco $|z| < 1$; $w = i\ \frac{z-1}{z+1}$

   b) El cuadrante $x > 0$, $y > 0$, $w = \frac{z-i}{z+i}$

   c) La franja $0 < x < 1$; $w = \frac{z}{z-1}$

3. Encontrar la transformación fraccional lineal que mapea los puntos $-1, i, 1+i$ respectivamente en:

   a) $0, 1, \infty$

   b) $1, \infty, 0$

   c) $2, 3, 4$

   d) $0, 1, i$

4. Encontrar los puntos simétricos al punto $3+4i$ con respecto a los círculos

   a) $|z| = 1$

   b) $|z-1| = 1$

   c) $|z-i| = 2$

Continuidad Analítica

5. Encontrar una función que coincida con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ en su disco de convergencia. Desarrollar la serie en un entorno de $z = \frac{1}{2}$ y determine su radio de convergencia.

6. Encontrar una función que coincida con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ en su disco de convergencia. Desarrollar la serie en una serie de Taylor en un entorno de $z = a, |a| < 1$.¡Cuál es el nuevo radio de convergencia?

7. Demostrarque la función $f_2(z) = \frac{1}{z^2+1}, z \neq \pm i$ es la continuación analítica de la función $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, |z| < 1$ en el dominio que consta de todos los puntos del plano z excepto $z = \pm i$