# Práctico 1 -números complejos.-

## A. Repaso de Números Complejos.

**Ejercicio 1.** Expresar los siguientes números complejos en la forma $x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $(1 + 2i)(1 - 2i)(3 + 4i)$ (b) $(2 - 3i)^2$ (c) $\frac{3+5i}{1+7i}$

(d) $(-1 + 3i)^{-1}$ (e) $\mathrm{Im}[(3 + 4i)(1 - 2i)]$

(g) $\frac{2+i}{1-i} + \frac{2-i}{1+i} + i$ (h) $[\frac{2+i}{3+4i} - \frac{2i}{3-4i}]^2$ (f) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

**Ejercicio 2.** Encontrar las partes real e imaginaria de los siguientes números complejos:

(a) $z^2$ (b) $z^3$ (c) $z^{-1}$

(d) $\dfrac{z-a}{z+a}$, con $a \in \mathbb{R}$. (e) $\frac{1}{z^2}$

**Ejercicio 3.** Comprobar que:

(a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = -2i$ (b) $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{i}{2}$ (c) $(1 - i)^4 = -4$

**Ejercicio 4.** Encontrar el valor absoluto y el conjugado de los siguientes números complejos

(a) $-2 + i$ (b) $-3$ (c) $(2 + i)(4 + 3i)$

(d) $\dfrac{3-i}{\sqrt{2}+3i}$ (e) $(1 + i)^6$ (f) $i^{17}$.

**Ejercicio 5.** Sean $z$ y $w$ dos números complejos. Probar que:

(a) $\overline{z} = z$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$ (b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (c) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(d) $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ (e) $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ (f) $zw = 0 \Rightarrow z = 0$ o $w = 0$.

**Ejercicio 6.** Sean $z$ y $w$ dos números complejos. Probar que:

(a) $Re(z) \leq |z|$ y $Im(z) \leq |z|$

(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

(c) $|zw| = |z|\,|w|$

(d) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$

(f) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$

(g) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(h) $||z| - |w|| \leq |z-w|$

(i) $|z+1| \geq |z-1|$ si y sólo si $Re(z) > 0$

**Ejercicio 7.** Pasar de la forma $x + iy$ a la forma polar y exponencial:

(a) $1 - i$

(b) $2 + 2\sqrt{3}i$

(c) $-4i$

(d) $-2$

(e) $4i$

(f) $-5 + 5i$

**Ejercicio 8.** Encontrar:

(a) Las raíces sextas de la unidad.

(b) Las raíces cúbicas de $i$.

(c) $(2i)^{1/2}$

(d) $(-i)^{1/3}$

(e) $(1+i)^{1/4}$

(f) $(1-i)^{-1/3}$

**Ejercicio 9.** Pasar de la forma exponencial a la forma $x + iy$:

(a) $e^{-\pi/2}$

(b) $3e^{i\pi/2}(1+i)$

**Ejercicio 10.** Determinar todas las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $z^3 + 2 = 0$

(b) $z^2 + z + i = 0$

(c) $z^3 + z^2 i + 2z = 0$

(d) $z^4 - 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$

(e) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

(f) $z^5 + 16z - z^4 - 16 = 0$

---

## B. Conjuntos en el plano complejo.

---

**Ejercicio 11.** Representar gráficamente los complejos $z$ que verifican las siguientes ecuaciones o desigualdades. Decir cuáles de estos problemas no tienen solución.

(a) $\mathrm{Re}\,(z) = -2.$

(b) $\mathrm{Im}\,(z) \geq |z|$

(c) $\mathrm{Im}\,(z) \geq \mathrm{Re}\left(z^2\right)$

(d) $\mathrm{Im}\,(z) \geq \mathrm{Re}\,(z)$

(e) $|z - 3 + 2i| < 4$

(f) $\mathrm{Im}(z+2i) = \mathrm{Re}(z-3)$

(g) $\mathrm{Re}\,(z) = 3\,\mathrm{Im}\,(z)$

(h) $z\overline{z} \geq 2\,\mathrm{Re}\,(z)$

(i) $|z + 3 - 4i| \leq 0$

**Ejercicio 12.**

(a) Representar los siguientes conjuntos del plano complejo:

i. $-1 \leq \operatorname{Im}(z) < 3$

ii. $|z| < |z - 2i|$

iii. $\operatorname{Re}(z) < -1$

iv. $|\operatorname{Im}(z)| > 1$

v. $|z + 2 - i| \leq 1$

vi. $1 < |z - i| < 3$

vii. $|z| > 2$, $\pi/4 \leq arg(z) \leq \pi$

(b) ¿Cuáles de estos conjuntos no son abiertos ni cerrados?

(c) ¿Cuáles son dominios?

(d) ¿Cuáles son acotados?

**Ejercicio 13.** Dados los conjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por:

$$\begin{aligned}
A &= \{z \in \mathbb{C} \;/\; \operatorname{Re} z \geq 0\} \\
B &= \{z \in \mathbb{C} \;/\; \operatorname{Im} z < 1\} \cup \{2i\} \\
C &= \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z - 2 + i| < 3\} \\
D &= \{z \in \mathbb{C} \;/\; 1 < |z - 1| \leq 2\} \\
E &= \{z \in \mathbb{C} \;/\; 0 < |z - 3| \leq 2\} \\
F &= \{z \in \mathbb{C} \;/\; -1 < \operatorname{Re}(z) < 1\}
\end{aligned}$$

(a) ¿Son estos conjuntos acotados?.

(b) Mostrar, si es posible, puntos que sean de acumulación y puntos aislados para cada conjunto.

(c) Mostrar los puntos interiores y los puntos frontera para cada conjunto.

(d) Decidir cuáles de estos conjuntos son abiertos, cerrados y acotados.

(e) Determinar la clausura de cada conjunto.