ANÁLISIS MATEMÁTICO 3-VARIABLE COMPLEJA

MARÍA J. ALEANDRO AND CARLOS C. PEÑA

1. Números complejos

(1) Formalmente sea $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos, o sea
$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$
donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales.

(2) Sea $z \in \mathbb{C}$. Hay entonces únicos $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $z = x + iy$. En particular, mediante la letra i indicamos al único número complejo cuya parte real es cero y su parte imaginaria es uno.
Se indica $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$, y se dice que x e y son las partes real e imaginaria de z respectivamente.

(3) En particular, i denota al único número complejo tal que $\mathrm{Re}(i) = 0$ e $\mathrm{Im}(i) = 1$, o bien $i = 0 + i1$.

(4) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, i.e. todo número real es complejo. Precisamente, si $x \in \mathbb{R}$ podemos escribir $x = x + i0$.

(5) Así $\mathbb{C}$ se presenta como un conjunto, un tanto abstracto, en el que se definen las siguientes operaciones de suma y multiplicación, a saber: Dados $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se escribe:
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$
Ciertamente $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ y $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$ y las operaciones anteriores están bien definidas.

(6) Queda establecida en $\mathbb{C}$ una estructura algebraica, lo que se denomina un cuerpo. No abundaremos en esto, solo señalamos cuestiones principales:
(a) Ambas operaciones son asociativas.
(b) La suma es conmutativa.
(c) Indiquemos $0_{\mathbb{C}} = 0 + i0$ y $1_{\mathbb{C}} = 1 + i0$. Entonces $z + 0_{\mathbb{C}} = z$ y $1_{\mathbb{C}} \cdot z = z$. Por ello $0_{\mathbb{C}}$ y $1_{\mathbb{C}}$ son elementos neutros para la suma y la multiplicación respectivamente. Por abuso de notación, escribiremos simplemente $0_{\mathbb{C}} = 0$ y $1_{\mathbb{C}} = 1$.
(d) El producto es conmutativo.
(e) Cada $z \in \mathbb{C}$ tiene un único inverso aditivo $\widetilde{z} \in \mathbb{C}$, o sea $z + \widetilde{z} = 0$. Precisamente, si $z = x + iy$ debe ser $\widetilde{z} = -x + i(-y)$. Indicamos entonces $\widetilde{z} = -z$, de modo que $-z = -x + i(-y)$.
(f) Dado $z \in \mathbb{C}$ existe $\widehat{z}$ tal que $z \cdot \widehat{z} = 1$ si y solo si $z \neq 0$. En ese caso, $\widehat{z}$ queda unívocamente determinado y escribimos $\widehat{z} = z^{-1}$.

Date: Received: , Accepted: .

Obsérvese entonces que si bien todo número complejo tiene inverso aditivo, sólo los complejos no nulos tienen inverso multiplicativo.
(g) Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ resulta $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.
(h) En síntesis, que $\mathbb{C}$ es un cuerpo significa que se trata de un anillo (las propiedades anteriores salvo (d) y (f)) de división (propiedad (f)) conmutativo (propiedad (d)).

.

2. ¡Desorden en $\mathbb{C}$!

(1) Recordar que $\mathbb{R}$ es un conjunto totalmente ordenado. Este hecho está establecido en la misma axiomática del conjunto de los números reales, específicamente en los axiomas de tricotomía y de monotonía.
(2) En efecto, hay en $\mathbb{R}$ una relación de orden $\leq$, o sea dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene: (i) $x \leq x$ (reflexividad); (ii) Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$ (transitividad); Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$ (antisimetría).
(3) Este orden $\leq$ es total, como reza el axioma de tricotomía: si $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica una y solo una de las siguientes tres posibilidades: $x < y$, $x = y$ o $y < x$.
(4) El axioma de monotonía respecto a la suma precisa el comportamiento del orden respecto de la suma: dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $y < z$ resulta $x + y < x + z$.
(5) El axioma de monotonía respecto al producto hace lo propio respecto al producto de números: dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $y < z$ y $0 < x$ resulta $xy < xz$.
(6) Por §1.(5) vemos que $i^2 = -1$, es decir, el cuadrado de un número complejo puede ser negativo. A diferencia de $\mathbb{R}$, que es un conjunto ordenado, $\mathbb{C}$ no lo es. En efecto, supongamos que $\mathbb{C}$ tuviere las propiedades de orden anteriores. Vemos que $i \neq 0$ ya que $\mathrm{Im}(0) = 0$ e $\mathrm{Im}(i) = 1$. Si fuera $0 < i$, por monotonía sería $0 = i0 < ii = i^2 = -1$, lo que es absurdo. Debería ser $i < 0$, y por monotonía de la suma tendríamos $0 = -i + i < -i + 0 = -i$. Luego por monotonía del producto obtenemos
$$0 = (-i)0 < (-i)(-i) = (-1)^2 i^2 = 1i^2 = -1,$$
lo que también es absurdo.
(7) En definitiva, $\mathbb{C}$ no es conjunto ordenado, un defecto si se quiere respecto al orden de los números reales. Sin embargo, es el precio que se paga a cambio de una propiedad relevante que sí posee C pero no $\mathbb{R}$: $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.

3. Cerradura algebraica de $\mathbb{C}$

(1) Señalamos que $i^2 = -1$, o sea $i \in \mathbb{C}$ es solución de la ecuación $z^2 + 1 = 0$.

(2) Es inmediato que esta ecuación no es soluble en $\mathbb{R}$, pues el cuadrado de todo número real es no negativo, de modo que si $z \in \mathbb{R}$ se tiene $0 < 1 \leq z^2 + 1$.

(3) Más generalmente, todo polinomio no nulo con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. O sea, dado $n \in \mathbb{N}$, sea

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \text{ donde } a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}.$$

Que $\mathbb{C}$ sea algebraicamente cerrado significa que siempre existe un elemento $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$. Se dice entonces que z_0 es una raíz de p.

(4) Entonces $\mathbb{C}$, a diferencia de $\mathbb{R}$, es algebraicamente cerrado. Esta propiedad torna al cuerpo $\mathbb{C}$ sumamente importante. Hay un teorema, el Teorema Fundamental del Álgebra, que sostiene que todo polinomio con coeficientes complejos tiene tantas raíces como su grado, n en la notación anterior (V. [2], p. 449).

4. La métrica y conjugación complejas

(1) Dado $z \in \mathbb{C}$, digamos $z = x + iy$, escribimos $\overline{z} = x - iy$. Decimos que $\overline{z}$ es la conjugación de z.

(2) Notar que

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Podemos definir $\mid z \mid = (x^2 + y^2)^{1/2}$, y decimos que $\mid z \mid$ es la norma o módulo de z.

(3) En particular, el módulo de complejos reales coincide con el módulo usual de números reales.

(4) Si $z \in \mathbb{C}$ es fácil ver que $\mid z \mid \geq 0$ y $\mid z \mid = 0$ si y solo si $z = 0$.

(5) Además si $z, w \in \mathbb{C}$ resulta $\mid z + w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid$ (desigualdad triangular). En efecto,

$$\begin{aligned}
\mid z + w \mid^2 &= (z + w) \cdot \overline{z + w} \\
&= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= \mid z \mid^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + \mid w \mid^2 \\
&\leq \mid z \mid^2 + 2 \mid z\overline{w} \mid + \mid w \mid^2 \\
&= \mid z \mid^2 + 2 \mid z \mid\mid \overline{w} \mid + \mid w \mid^2 \\
&= \mid z \mid^2 + 2 \mid z \mid\mid w \mid + \mid w \mid^2 \\
&= (\mid z \mid + \mid w \mid)^2
\end{aligned}$$

y el resultado sigue tomando raíces cuadradas.

(6) Por otra parte $\mid zw \mid = \mid z \mid\mid w \mid$ cualesquiera sean z y w, loque es muy fácil de verificar.

(7) En definitiva, el módulo de números complejos define una métrica, la métrica compleja.

5. Discos y circunferencias

(1) Indicamos $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid= 1\}$, la circunferencia unitaria, y también
$$\mathbb{D}^1 = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid< 1\} \text{ y } \overline{\mathbb{D}}^1 = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid\leq 1\}$$
los discos abierto y cerrado unitarios centrados en cero.

(2) Asimismo, si $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ sean
$$\mathbb{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} :\mid z - a \mid< r\} \text{ y } \overline{\mathbb{D}}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} :\mid z - a \mid\leq r\}.$$
.

6. Plano polar y función argumento

(1) El plano real $\mathbb{R}^2$ admite una representación cartesiana. Todo punto $\overrightarrow{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ queda unívocamente determinado por sus coordenadas cartesianas: la abscisa x y la ordenada y. Como siempre,
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$
Los dos ejes reales, de abscisas o eje [x] y de ordenadas o eje [y], se consideran perpendiculares entre sí intersecándese en el cero de ambos ejes.

(2) Todo punto $\overrightarrow{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ es un vector. Si no se trata del vector nulo $\overrightarrow{0} = (0, 0)$, este vector $\overrightarrow{p}$ tiene orígen en $(0, 0)$, final en (x, y), dirección dada por la recta que definen $\overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{p}$ y sentido, dado por la semirrecta que se inicia en $\overrightarrow{0}$ y pasa por $\overrightarrow{p}$.

(3) Esta semirrecta forma, con la semirrecta del eje de abscisas formada por los números positivos, o eje $[x^+]$, un ángulo, el que se mide en sentido antihorario. Este ángulo $\theta = \theta(\overrightarrow{p})$, estará en el rango $0 \leq \theta < 2\pi$. Observar que $\theta(x, y) = \theta(cx, cy)$ cualquiera sea $c > 0$.

(4) Si $x > 0$ e $y \geq 0$ i.e. si $\overrightarrow{p}$ se ubica en el primer cuadrante, $\tan \theta = y/x$, como sigue al considerar el triángulo rectángulo $\overrightarrow{0}\overrightarrow{p'}\overrightarrow{p}$ rectángulo en $\overrightarrow{p'}$, donde $\overrightarrow{p'} = (x, 0)$.

(5) La función tangente $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}, \tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ está bien definida. Además es derivable y $(\tan)'(\theta) = (\cos \theta)^{-2}$ es siempre positiva. Luego la tangente resulta estrictamente creciente. Por ello esta función resulta inyectiva. Además $\lim_{\theta \to -\pi/2} \tan \theta = -\infty$ y $\lim_{\theta \to \pi/2} \tan \theta = +\infty$, por lo que sigue la suryectividad. Entonces esta función, en cuanto biyectiva, resulta inversible. Su inversa es la función $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$.

(6) Si $x > 0$ e $y \geq 0$ podemos escribir $\theta = \arctan(y/x)$. Queda así definida la función argumento, para puntos en el primer cuadrante $\arg(x, y) = \arctan(y/x)$. Notar que en este caso $\arg(x, y) \in [0, \pi/2)$.

(7) Podemos extender la función argumento a puntos de todo el plano real salvo el orígen, de modo que $\arg : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to [0, 2\pi)$. Para ello hacemos entonces:
(a) $\arg(x, y) = \arctan(y/x)$ si $x > 0, y \geq 0$.

(b) $\arg(0, y) = \pi/2$ si $y > 0$.
(c) $\arg(x, y) = \arctan(y/x) + \pi$ si $y \geq 0 > x$.
(d) $\arg(0, y) = 3\pi/2$ si $y < 0$.
(e) $\arg(x, y) = \arctan(y/x) + \pi$ si $x < 0, y < 0$.
(f) $\arg(x, y) = \arctan(y/x) + 2\pi$ si $x > 0 > y$.

(8) Escribiremos $\arg : \mathbb{C} - \{0\} \to [0, 2\pi)$, $\arg(x + iy) = \arg(x, y)$.

(9) El argumento no es función continua. Por ejemplo, si $x > 0$ será $\lim_{\epsilon\to 0^+} \arg(x + i\epsilon) = 0$ y $\lim_{\epsilon\to 0^+} \arg(x - i\epsilon) = 2\pi$, de modo que no existe $\lim_{z\to x}$ y el argumento no es continuo en $z = x$.

(10) El argumento resultará continuo si restrigimos su dominio. Si consideramos $\arg : \mathbb{C} - [0, +\infty) \to [0, 2\pi)$ obtenemos una función continua.

(11) Fijemos $\mu \in \mathbb{R}$. Queda definida
$$F_\mu : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e^{i\mu} \to [\mu, \mu + 2\pi),\ F_\mu(z) = \mu + \arg(ze^{-i\mu}).$$
En particular, F_0 es la función argumento precedente, también conocida como determinación principal del argumento. La función F_μ también es una función argumento, continua, con valores en el intervalo $[\mu, \mu + 2\pi)$.

(12) La función argumento es un ejemplo de función multivaluada. Usualmente hay que dar una determinación de la misma que garantice algunas propiedades deseables. Con la notación anterior, F_μ es una determinación del argumento, aquella bajo la cual la función toma valores en el intervalo $[\mu, \mu + 2\pi)$ de manera continua. La selección de estas determinaciones se hace con criterios de utilidad o conveniencia. Subyace el hecho de la 2π-periodicidad de las funciones trigonométricas. Según las condiciones específicas de trabajo convendrá convendrá la medición de ángulos en un rango de 0 a 2π, de $-\pi$ a π, de $-\pi/2$ a $3\pi/2$, etc..

(13) En general $\mu \leq F_\mu(z) < \mu + 2\pi$ y $\mu \leq F_\mu(w) < \mu + 2\pi$, o sea $2\mu \leq F_\mu(z) + F_\mu(w) < 2\mu + 4\pi$. Entonces
$$2\mu - 2\pi \leq F_\mu(z) + F_\mu(w) - 2\pi < 2\mu + 2\pi.$$
Luego
$$\mu - 2\pi \leq F_\mu(z) + F_\mu(w) - \mu - 2\pi < \mu + 2\pi.$$
Caben dos posibilidades:
(a) $\mu - 2\pi \leq F_\mu(z) + F_\mu(w) - \mu - 2\pi < \mu$.
(b) $\mu \leq F_\mu(z) + F_\mu(w) - \mu - 2\pi < \mu + 2\pi$.
En el caso (a) observamos que $\mu \leq F_\mu(z) + F_\mu(w) - \mu < \mu + 2\pi$ y resulta $F_\mu(z \cdot w) = F_\mu(z) + F_\mu(w) - \mu$.
En el caso (b) es $F_\mu(z \cdot w) = F_\mu(z) + F_\mu(w) - \mu - 2\pi$.
Cabe observar que no siempre el argumento de un producto es, como podría esperarse, la suma de los argumentos de cada factor.

(14) Escribiremos $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$. Queda definida la aplicación exponencial $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\exp(\theta) = e^{i\theta}$. Usando solo propiedades trigonométricas es fácil ver que $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$ cualesquiera sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(15) Sea $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\theta = \arg(x, y)$. Suponiendo z en el primer cuadrante resulta $\sin\theta = y/ \mid z \mid$, como sigue al considerar el triángulo rectángulo $\overrightarrow{0}\overrightarrow{p'}\overrightarrow{p}$ rectángulo en $\overrightarrow{p'}$, donde $\overrightarrow{p'} = (x, 0)$. Asimismo, $\cos\theta = x/ \mid z \mid$. En consecuencia,

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \text{donde } r = \mid z \mid .$$

De esta manera se tienen la representación cartesiana y polar de z respectivamente.

7. Completitud de la métrica compleja

(1) Consideremos el espacio métrico complejo $(\mathbb{C}, \mid \circ \mid)$, esto es $\mathbb{C}$ munido de la métrica $\mid \circ \mid$. Como es usual, una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $a \in \mathbb{C}$ si $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, i.e. si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid z_n - a \mid < \epsilon$ toda vez que $n \geq n_0$.

(2) Asimismo, decimos que una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy si para todo $\xi > 0$ existe $n^0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid z_n - z_k \mid < \xi$ toda vez que $n \geq n^0$ y $k \geq n^0$.

(3) Toda sucesión convergente es de Cauchy. Precisamente, sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a un elemento $a \in \mathbb{C}$ y fijemos $\xi > 0$. Dados $n, k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\mid z_n - z_k \mid \leq \mid z_n - a \mid + \mid a - z_k \mid .$$

Como $\lim_{l\to\infty} z_l = a$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid z_l - a \mid < \xi/2$ si $l \geq n_0$. Luego si $n, k \geq n_0$ deducimos que $\mid z_n - z_k \mid < \xi$ y la sucesión dada resulta ser de Cauchy.

(4) No necesariamente una sucesión de Cauchy debe converger. La identificación de las clases de sucesiones convergentes y de las de Cauchy depende de las condiciones del espacio métrico en cuestión. Un espacio métrico (X, d) (en nuestro caso $X = \mathbb{C}$ y $d = \mid \circ \mid$) se dice espacio métrico completo si toda sucesión de Cauchy es convergente, o lo que es equivalente, si las clases de sucesiones convergentes y de sucesiones de Cauchy son iguales.

(5) $(\mathbb{R}, \mid \circ \mid)$ es espacio métrico completo.
En efecto, sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de números reales. En particular, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid t_k - t_h \mid < 1$ si $k, h \geq n_0$. Luego si $k \geq k_0$ resulta

$$\mid t_k \mid \leq \mid t_k - t_{k_0} \mid + \mid t_{k_0} \mid \leq 1 + \mid t_{k_0} \mid,$$

o sea $\mid t_h \mid \leq \max\{t_1, ..., t_{k_0 - 1}, 1 + \mid t_{k_0} \mid\}$ cualquiera sea $h \in \mathbb{N}$, i.e. $\{t_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ es sucesión acotada. Por el teorema de Bolzano esta sucesión tiene una subsucesión convergente, i.e. existe una sucesión creciente $\{n_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ de números naturales y un elemento $t \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{l\to\infty} t_{n_l} = t$. Veamos entonces que la sucesión dada converge a t, lo que mostrará la completitud de $\mathbb{R}$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ sea $n^0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mid t_k - t_h \mid \leq \epsilon/2$ si $k, h \geq n^0$. Sea además $l_0 \in \mathbb{N}$

tal que $\mid t_{n_l} - t \mid\leq \epsilon/2$ si $l \geq l_0$. Como $\lim_{l\to+\infty} n_l = +\infty$ podemos suponer que $n_{l_0} > n^0$. En consecuencia si $k \geq n^0$ tenemos

$$\mid t_k - t \mid\leq\mid t_k - t_{n_{l_0}} \mid + \mid t_{n_{l_0}} - t \mid< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

y sigue la afirmación.

(6) $(\mathbb{C}, \mid \circ \mid)$ es espacio métrico completo. Precisamente, sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Notamos que dado $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\max\{\mid \mathrm{Re}(z) \mid, \mid \mathrm{Im}(z) \mid\} \leq\mid z \mid.$$

Por ello si $z_n = x_n + iy_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se infiere que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son ambas sucesiones de Cauchy reales. Existen entonces $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ e $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Haciendo $z = x + iy$ si $n \in \mathbb{N}$ resulta

$$\mid z_n - z \mid=\mid x_n + iy_n - x - iy \mid\leq\mid x_n - x \mid + \mid y_n - y \mid.$$

Haciendo $n \to +\infty$ sigue la afirmación.

8. Elementos de topología

(1) Sea A un subconjunto de $\mathbb{C}$. Decimos que A es abierto si dado $a \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbb{D}(a, \epsilon) \subseteq A$. En particular, el conjunto vacío es abierto por definición.

(2) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia cualquiera de subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$ y sea $A = \cup_{i\in I} A_i$ la unión de esta familia, o sea

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \text{existe } i \in I \text{ tal que } z \in A_i\}.$$

Entonces A resulta abierto, i.e. la unión de conjuntos abiertos, sin importar el número, es abierto.
En efecto, sea $z \in A$. Existe entonces $i \in I$ de modo que $z \in A_i$. Como A_i es abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbb{D}(z, \epsilon) \subseteq A_i$. Como

$$\mathbb{D}(z, \epsilon) \subseteq A_i \subseteq A$$

sigue la afirmación.

(3) Si A, B son abiertos entonces $A\cap B$ es abierto. Luego la intersección de un número finito de abiertos es abierta. Para verlo, sea $z \in A\cap B$. Existen ϵ_1, ϵ_2 positivos tales que $\mathbb{D}(z, \epsilon_1) \subseteq A$ y $\mathbb{D}(z, \epsilon_2) \subseteq B$. Si $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ entonces $\epsilon > 0$ y

$$\mathbb{D}(z, \epsilon) \subseteq \mathbb{D}(z, \epsilon_1) \cap \mathbb{D}(z, \epsilon_2) \subseteq A \cap B$$

y sigue la afirmación.

(4) Sean T un conjunto no vacío y Υ una familia de subconjuntos de T tal que: $\emptyset \in \Upsilon$, $T \in \Upsilon$, Υ es cerrado por uniones en número arbitrario y por intersecciones en número finito. Entonces se dice que (T, Υ) es un espacio topológico y que Υ es una topología de T. A los miembros de Υ se los llama abiertos de T respecto a la topología Υ. En los puntos anteriores vimos cómo la métrica compleja permite introducir una topología en $\mathbb{C}$.

(5) Sean (T, Υ) espacio topológico y C subconjunto de T.
(a) Se dice que C es cerrado si $T - C$ es abierto, i.e. si $T - C \in \Upsilon$.

(b) Se dice que C es denso en T si cualquiera sea $U \in \Upsilon$ resulta $C \cap U \neq \emptyset$

(6) Sean (T, Υ) espacio topológico y $t \in T$. Se llama entorno o vecindad de t a todo subconjunto S de T que contiene algún abierto U tal que $t \in U$ y $U \subseteq S$. La noción de entorno o vecindad es crucial en análisis, tiene que ver con la cercanía en el sentido corriente del vocablo. En sentido real el grado de cercanía puede estar fuertemente influenciado por las condiciones del terreno. Por ejemplo no es lo mismo el llano, la montaña o una costa accidentada. Es oportuno señalar el sentido etimológico de la palabra topología: topos es terreno, logos es estudio, conocimiento. La topología trata, exactamente, el estudio de las condiciones del terreno.

(7) Sea (T, Υ) espacio topológico, S un subconjunto de T. Queda inducida una topología sobre S, digamos Υ_S. En efecto, sea
$$\Upsilon_S = \{S \cap U : U \in \Upsilon\}.$$
Es fácil ver que (S, Υ_S) es espacio topológico, siendo Υ_S la topología inducida por T en S.

(8) Un espacio topológico (T, Υ) se dice espacio de Hausdorff si dados puntos distintos $s, t \in T$ existen abiertos disjuntos U, V tales que $s \in U$ y $t \in V$.

9. Puntos especiales de un conjunto en un espacio topológico

En lo que sigue, sea (T, Υ) un espacio topológico y S un subconjunto no vacío de T.

(1) Un punto $t \in T$ se dice punto interior de S si existe $U \in \Upsilon$ tal que $U \subseteq S$. Indicamos S° al conjunto de puntos interiores de S. Notar que $S^\circ \subseteq S$. Por otra parte S es abierto si y solo si $S = S^\circ$.

(2) Un punto $t \in T$ se dice punto adherente (o de clausura) de S si $U \cap S \neq \emptyset$ cualquiera sea $U \in \Upsilon$ tal que $t \in U$. Indicamos S^- al conjunto de puntos adherentes de S. Notar que $S \subseteq S^-$. Además S es cerrado si y solo si $S = S^-$.

(3) Un punto $t \in T$ se dice punto de acumulación de S si $S \cap U - \{t\} \neq \emptyset$ cualquiera sea $U \in \Upsilon$ tal que $t \in U$. Indicamos S' al conjunto de puntos de acumulación de S. Notar que $S^- - S \subseteq S' \subseteq S^-$.

(4) Llamamos frontera de S al conjunto $\partial S = (T - S)^- \cap S^-$. Luego dado $t \in T$, $t \in \partial S$ si y solo para cada $U \in \Upsilon$ que contiene a t resulta $S \cap S \neq \emptyset$ y $U \cap (T - S) \neq \emptyset$.

(5) Un punto $t \in T$ se dice punto aislado de S si existe $U \in \Upsilon$ tal que $U \cap S = \{t\}$. Indicamos S_{ai} al conjunto de puntos aislados de S.

(6) Por ejemplo, sean $T = \{x, y, z\}$ y $\Upsilon = \{\emptyset, T, \{x\}, \{x, y\}\}$. Entonces (T, Υ) es espacio topológico. Si $S_1 = \{y, z\}$ resulta
$$(S_1)^\circ = (S_1)_{ai} = \emptyset, (S_1)^- = S_1, \partial S_1 = \{z\}, (S_1)' = \{z\},$$
resultando S cerrado y no abierto. Si $S_2 = \{x, z\}$ se tiene

$$(S_2)^\circ = (S_2)_{ai} = \{x\}, (S_2)^- = T, \partial S_2 = \{y, z\}, (S_2)' = \{y, z\}.$$

10. Continuidad

(1) Sean $(X, \mathcal{U})$ e $(Y, \mathcal{V})$ espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice continua si $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ cualquiera sea $V \in \mathcal{V}$, donde
$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}.$$
Luego una función es continua si la preimágen de cada conjunto abierto del codominio es abierta en el dominio.

(2) Por ejemplo, sean $X = \{a, b, c\}, Y = \{1, 3, 9\}, \mathcal{U} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$ y $\mathcal{V} = \{\emptyset, Y, \{3\}\}$. La función
$$f : X \to Y,\ f(a) = 3, f(b) = f(c) = 9$$
resulta continua. En efecto,
$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{U},\ f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{U} \text{ y } f^{-1}(\{3\}) = \{a\} \in \mathcal{U}.$$
La función
$$g : X \to Y,\ g(a) = g(b) = 3, g(c) = 9$$
no es continua, ya que $g^{-1}(\{3\}) = \{a, b\}$ no pertenece a $\mathcal{U}$.

(3) La función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(x + iy) = x^2$ es continua.
Precisamente, sea $V \subseteq \mathbb{R}$ abierto y veamos que $f^{-1}(V)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Podemos suponer que V es un abierto propio no vacío. Sea $z_0 \in f^{-1}(V)$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Como $f(z_0) = x_0^2 \in V$ y V es abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $(x_0^2 - \epsilon, x_0^2 + \epsilon) \subseteq V$.
Debemos probar que existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{D}(z_0, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$. Supongamos conocido tal δ, aunque le precisemos después. Si $z = x + iy$ y $|z - z_0| < \delta$ tendríamos
$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0||x + x_0| \\ &\leq |z - z_0|[|x - x_0| + 2|x_0|] \\ &\leq |z - z_0|[|z - z_0| + 2|x_0|] \\ &\leq \delta[\delta + 2|x_0|]. \end{aligned}$$
Es claro que podemos elegir $\delta > 0$ de modo que $\delta[\delta + 2|x_0|] < \epsilon$. Con dicha elección resulta
$$\mathbb{D}(z_0, \delta) \subseteq f^{-1}((x_0^2 - \epsilon), x_0^2 + \epsilon) \subseteq f^{-1}(V)$$
y sigue la afirmación.

(4) Sean $(X, \mathcal{U})$ e $(Y, \mathcal{V})$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:
(a) f es continua.
(b) $f^{-1}(C)$ es cerrado en X cualquiera sea el subconjunto cerrado C de Y.
(c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ para todo $x_0 \in X$, o sea: dado $V \in \mathcal{V}$ tal que $f(x_0) \in V$ existe $U \in \mathcal{U}$ de modo que $x_0 \in U$ y $U \subseteq f^{-1}(V)$.
Precisamente:
(a) $\Rightarrow$ (b): Sea C subconjunto cerrado de Y. Luego $Y - C$ resulta

abierto y como f es continua $f^{-1}(Y-C)$ es abierto en X. Como $f^{-1}(Y-C)=X-f^{-1}(C)$ sigue que $f^{-1}(C)$ es cerrado. Por §9(2) existe $U\in\mathcal{U}$ tal que $x_0\in U$ y $U\cap f^{-1}(Y-V)=\emptyset$ y resulta $U\subseteq f^{-1}(V)$.
(b) $\Rightarrow$ (c): Sean $x_0\in X$ y $V\in\mathcal{V}$ tal que $f(x_0)\in V$. Entonces $f(x_0)\notin Y-V$ e $Y-V$ es cerrado en Y. Resulta $x_0\notin f^{-1}(Y-V)$ y, por hipótesis, $f^{-1}(Y-V)$ es cerrado en X.
(c) $\Rightarrow$ (a): Sean V abierto en Y y $x_0\in f^{-1}(V)$. Como $f(x_0)\in V$ por hipótesis existe U abierto en X tal que $x_0\in U$ y $U\subseteq f^{-1}(V)$. Como x_0 es arbitrario sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto. Siendo V arbitrario sigue la tesis.

11. Compacidad

(1) Sea (T,Υ) espacio topológico y sea $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos no vacíos de T.
(a) Decimos que $\mathcal{U}$ es cubrimiento de T si $T=\cup_{i\in I}U_i$.
(b) Un tal cubrimiento $\mathcal{U}$ de T se dice cubrimiento abierto de T si cada uno de sus elementos es abierto, o sea si $\mathcal{U}\subseteq\Upsilon$.
(c) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de T y sea $\mathcal{V}=\{U_{i_j}\}_{j\in J}$ una subfamilia de $\mathcal{U}$, i.e. $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$. Decimos que $\mathcal{V}$ es un subrecubrimiento de $\mathcal{U}$ si aún $T=\cup_{j\in J}U_{i_j}$.
(d) Un cubrimiento de T se dice finito si tiene un número finito de elementos.

(2) Un espacio topológico se dice compacto si cada cubrimiento abierto contiene un subrecubrimiento finito.

(3) Por ejemplo, sea $T=(0,1]$ y sea Υ la topología inducida por $\mathbb{R}$ en T (v. §8(7)). Este espacio no es compacto.
En efecto, la familia $\mathcal{U}=\{(1/n,1]\}_{n\geq 2}$ es cubrimiento abierto de T pues $T=\cup_{n=2}^{\infty}(1/n,1]$. Sin embargo, dados $2\leq n_1<...<n_k$ resulta
$$\cup_{l=1}^{k}(1/n_l,1]=(1/n_k,1]\subsetneq(0,1].$$

(4) Todo intervalo $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ es compacto (cf. [1], §9.2(d), p. 85).

(5) Sean (T,Υ) espacio de Hausdorff y C subconjunto compacto no vacío de T (V. §8(8)). Entonces C es cerrado.
Precisamente, si no fuera así existiría $s\in C^{-}-C$. Como el espacio es de Hausdorff dado $t\in C$ existirán abiertos disjuntos U_t,V_t tales que $s\in U_t$ y $t\in V_t$. Claramente $C=\cup_{t\in C}C\cap V_t$ y $\{C\cap V_t\}_{t\in C}$ es cubrimiento abierto de C (v. §8(7)). Como C es compacto existe un subconjunto finito F de C tal que $C=\cup_{t\in F}C\cap V_t$. Haciendo $U=\cap_{t\in F}U_t$ vemos que U es abierto, $s\in U$ y $U\cap C=\emptyset$. Pero esto contradice que s es punto adherente de C y debe ser $C^{-}=C$.

(6) Sean (T,Υ) espacio de compacto, C subconjunto cerrado de T. Entonces C es compacto.
En efecto, sea $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de C. Para cada $i\in I$

podemos escribir $U_i = C \cap \widetilde{U}_i$, con $\widetilde{U}_i$ abierto en T. Tenemos que $T = (T - C) \cup \cup_{i \in I} \widetilde{U}_i$. Como T es compacto podemos hallar un subconjunto finito F de I tal que $T = (T - C) \cup \cup_{i \in F} \widetilde{U}_i$. En consecuencia

$$C = C \cap T = \cup_{i \in I} C \cap \widetilde{U}_i = \cup_{i \in I} U_i$$

y C resulta compacto.

(7) Sea C subconjunto no vacío del plano complejo. Evidentemente $C = \cup_{z \in C} C \cap \mathbb{D}(z, 1)$. Como C es compacto y $\{C \cap \mathbb{D}(z, 1)\}_{z \in C}$ es cubrimiento abierto de C hay un subconjunto finito F de C tal que $C = \cup_{z \in F} C \cap \mathbb{D}(z, 1)$. Luego C está contenido en la unión de un número finito de discos, de modo que podemos elegir $R > 0$ lo suficientemente grande tal que $C \subseteq \mathbb{D}(0, R)$, i.e. C es acotado.

(8) Evidentemente $\mathbb{C}$ es espacio de Hausdorff. Podemos concluir que todo subespacio compacto de $\mathbb{C}$ es cerrado y acotado. En particular, $\mathbb{C}$ no es espacio compacto.

(9) Nos interesa el estudio de funciones de variable compleja, y acabamos de ver que en cuanto espacio topológico $\mathbb{C}$ no es compacto. Los espacios compactos ofrecen ventajas relevantes, desde un punto de vista teórico, que son deseables. Vamos a sortear esta dificultad que se nos plantea sumergiendo el plano complejo en un espacio topológico más grande, que será compacto, y en el que $\mathbb{C}$ será denso.

(10) Hagamos $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde ∞ indica un elemento agregado extraño al plano complejo. Nos referiremos a ∞ como al infinito, una abstracción matemática que trataremos casi como a un número más aunque no lo es.

(11) Introducimos la topología Υ_∞ en $\mathbb{C}_\infty$, a saber: todo $U \in \Upsilon_\infty$ es un abierto de $\mathbb{C}$ o bien $\infty \in U$ y $\mathbb{C} - U$ es compacto.

(12) Sean $U, V \in \Upsilon_\infty$ y veamos que $U \cap V \in \Upsilon_\infty$. Se pueden dar tres casos:
(a) Si ambos son abiertos en el plano complejo su intersección es abierta en el plano complejo.
(b) Si $\infty \in U - V$ entonces

$$\mathbb{C} - (U \cap V) = (\mathbb{C} - U) \cup (\mathbb{C} - V)$$

es unión de un compacto y un cerrado en $\mathbb{C}$, o sea un cerrado. Luego $U \cap V$ es abierto.
(c) Si $\infty \in U \cap V$, $\mathbb{C} - (U \cap V)$ es la unión de dos compactos, lo que es claramente compacto.

(13) Sean U abierto en $\mathbb{C}$ y $V \in \Upsilon_\infty$ tal que $\infty \in V$. Entonces $\infty \in U \cup V$ y $\mathbb{C} - (U \cup V) = (\mathbb{C} - U) \cap (\mathbb{C} - V)$ es cerrado y está contenido en un compacto. Por §11(6) $\mathbb{C} - (U \cup V)$ es compacto y $U \cup V \in \Upsilon_\infty$.

(14) Sea ahora $\{U_i\}_{i \in I} \subset \Upsilon_\infty$ y veamos que $\cup_{i \in I} \in \Upsilon_\infty$. Observamos tres casos:
(a) Si se trata de abiertos complejos la unión será abierta y pertenecerá a Υ_∞.

(b) Si $\infty \in \cap_{i\in I} U_i$ es $\mathbb{C} - \cup_{i\in I} U_i = \cap_{i\in I}(\mathbb{C} - U_i)$, resulta compacto por §11(6). Luego $\cup_{i\in I} U_i \in \Upsilon_\infty$.
(c) Hay abiertos propios de $\mathbb{C}$ y elementos de Υ_∞ que contienen al punto del infinito, en cuyo caso basta aplicar §11(13).

(15) Podemos concluir que $(\mathbb{C}_\infty, \Upsilon_\infty)$ es espacio topológico. El mismo es compacto.
En efecto, sea $\{V_j\}_{j\in J}$ cubrimiento abierto de $\mathbb{C}_\infty$. Sea $j_0 \in J$ tal que $\infty \in V_{j_0}$. El conjunto $C = \mathbb{C} - V_{j_0}$ resulta compacto. Fijado $j \in J$, o bien V_j es abierto en el plano complejo o $V_j = \{\infty\} \cup (\mathbb{C} - C_j)$ para cierto compacto $C_j \subseteq \mathbb{C}$. Luego $C \cap V_j$ es abierto en C o $C \cap V_j = C \cap (\mathbb{C} - C_j)$ que también abierto en C, respectivamente. Como
$$C = C \cap \mathbb{C}_\infty = \cup_{j\in J}(C \cap V_j)$$
y C es compacto existe $F \subseteq J$ finito tal que $C = \cup_{j\in F}(C \cap V_j)$. En consecuencia
$$\mathbb{C}_\infty = V_{j_0} \cup (\mathbb{C}_\infty - V_{j_0)} = V_{j_0} \cup C \subseteq V_{j_0} \cup \cup_{j\in F} V_j \subseteq \mathbb{C}_\infty$$
y sigue la afirmación.

12. La función exponencial

(1) En §6(8) introdujimos la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$. Más generalmente, sea $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que
$$\exp(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z^n/n! = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$$
si $z \in \mathbb{C}$.

(2) Esta definición es correcta puesto que $(\mathbb{C}, |\circ|)$ es espacio métrico completo. En efecto, la existencia del límite anterior estará garantizada si probamos que cada sucesión $\{s_N(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, donde $s_N(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n/n!$ para cada N, z. Podemos escribir:
$$\begin{aligned} |s_{N+P}(z) - s_N(z)| &= |\sum_{n=P+1}^{N+P} z^n/n!| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{N+P} |z|^n/n! \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n/n! \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n/n! - \sum_{n=0}^{N} |z|^n/n!. \end{aligned}$$
Esto tiene sentido porque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n/n!$ es convergente. Precisamente, es una serie de términos positivos. Basta observar que
$$\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \text{ si } n \to +\infty$$

y aplicar el criterio de D'Alembert ([3], Prop. 4.6). Podemos concluir que $|s_{N+P}(z) - s_N(z)| \to 0$ si $N, P \to \infty$.

(3) En particular resulta

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\frac{(i\theta)^{4k}}{(4k)!} + \frac{(i\theta)^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{(i\theta)^{4k+2}}{(4k+2)!} + \frac{(i\theta)^{4k+3}}{(4k+3)!}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\frac{\theta^{4k}}{(4k)!} - \frac{\theta^{4k+2}}{(4k+2)!}] + i \sum_{k=0}^{\infty} [\frac{\theta^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{\theta^{4k+3}}{(4k+3)!}] \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{\theta^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{\theta^{2h+1}}{(2h+1)!} \\ &= \cos\theta + i \sin\theta. \end{aligned}$$

Luego la notación exponencial introducida en §6(8) es consistente.

(4) Dados z, w complejos es válida la identidad $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$. La prueba es un tanto compleja, deduciremos más adelante esto como aplicación del que llamaremos Principio de Prolongación Analítica.

(5) Si $z = x + iy$ en $\mathbb{C}$ resulta

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x||e^{iy}| = e^x > 0,$$

o sea $e^z \neq 0$ cualquiera sea z.

13. Funciones trigonométricas e hiperbólicas

(1) Usando §10(3) resulta

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \text{ y } \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta.$$

Más generalmente introducimos el coseno y el seno complejos como

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ y } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$.

(2) Por ejemplo es fácil ver que

$$\cos z = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

de modo que el desarrollo en serie de Taylor del coseno complejo coincide con el correspondiente desarrollo real sobre números reales. Lo mismo aplica al seno complejo.

(3) Desde luego se definen, toda vez que tienen sentido, las funciones

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \sec z = \frac{1}{\cos z}, \ \text{cosec} z = \frac{1}{\sin z}.$$

(4) Análogamente tenemos las funciones hiperbólicas complejas:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

y también

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \mathrm{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \mathrm{cosech} z = \frac{1}{\sinh z}.$$

14. Función logaritmo y funciones potenciales

(1) En §10(5) señalamos que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$. Procuremos determinar la imágen de la función exponencial. Dado entonces $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ queremos ver cuándo es soluble la ecuación $e^z = w$.

(2) Escribiendo $z = x + iy$ debería ser

$$0 < |w| = |e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = |e^x| = e^x,$$

o sea $x = \ln|w|$.

(3) Como en §6(14), podemos escribir la representación polar de w como $w = |w|e^{i\theta}$, con $\theta = \arg(w)$. Debe ser entonces $y = \arg(w)$. En definitiva, $z = \ln|w| + i\arg(w)$.

(4) Se define el logaritmo mediante

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}, \mathrm{Log}(w) = \ln|w| + i\arg(w).$$

(5) Por construcción, $\exp(\mathrm{Log}(w)) = w$. Por otra parte

$$\mathrm{Log}(\exp(z)) = \mathrm{Log}(\exp(x + iy)) = \ln e^x + i\arg(e^{iy}) = x + iy + 2k\pi i$$

donde $k \in \mathbb{Z}$, o sea $\mathrm{Log}(\exp(z)) = z + 2k\pi i$ ya que el logaritmo es multivaluado.

(6) Como el argumento, el logaritmo es una función multivaluada. Cada determinación del argumento define una determinación del logaritmo. Por ejemplo,

$$\mathrm{Log}(1 + i) = \ln\sqrt{2} + i(1/4 + 2k)\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Solo se precisa un logaritmo cuando se da una determinación del argumento. Si esta determinación fuera $-\pi \leq \arg < \pi$ el valor de k deberia ser tal que $-1 \leq 1/4 + 2k < 1$, o bien $-5/8 \leq k < 3/8$, o sea $k = 0$. En este caso $\mathrm{Log}(1 + i) = \sqrt{2} + i\pi/4$.

(7) En particular, llamaremos logaritmo principal al asociado al argumento principal.

(8) A raíz de lo observado en §6(13) no siempre el logaritmo de un producto será las suma de los logaritmos. Por ejemplo, considerando el logaritmo principal resulta

$$\mathrm{Log}[(-1 + i)(-i)] = \mathrm{Log}(1 + i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4},$$

pero

$$\mathrm{Log}(-1 + i) + \mathrm{Log}(-i) = [\ln\sqrt{2} + 3i\pi/4] + 3i\pi/2 = \ln\sqrt{2} + 9i\pi/4.$$

(9) Dado $a \in \mathbb{C}$ se define $z^a = e^{a\mathrm{Log}(z)}$. Es claro que estamos ante una función multivaluada, la cual solo se precisa una vez que fijamos una determinación del logaritmo (o del argumento subyacente).

(10) Dados $a, b \in \mathbb{C}$, usando §14(5) se tiene

$$\begin{aligned}(z^a)^b &= \exp[b\mathrm{Log}(z^a)] \\ &= \exp[b\mathrm{Log}(\exp(a\mathrm{Log}(z)))] \\ &= \exp[b(a\mathrm{Log}(z) + 2k\pi i)] \\ &= z^{ab}e^{2kb\pi i},\end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$.

References

[1] R. G. Bartle: *The elements of real analysis.* John Wiley and Sons, 2nd. Edition, (1976).
[2] E. Gentile: *Notas de álgebra I.* 2da. Edición, EUDEBA, (1964).
[3] R. Noriega: *Cálculo diferencial e integral.* Ed. Docencia, 2da Ed., Buenos Aires, (1987).

(UNCPBA, FCExactas, Dpto. Matemáticas, NUCOMPA) Campus Universitario, Tandil, Pcia. Bs. As., Argentina
Email address: majo.aleandro@gmail.com

(UNCPBA, FCExactas, Dpto. Matemáticas, NUCOMPA) Campus Universitario, Tandil, Pcia. Bs. As., Argentina
Email address: ccpenia@gmail.com