Parcial Analisis Matemático III, primera parte.
Todos los ejercicios deberan estar debidamente justificados. Esto incluye explicitar los resultados teóricos que se utilizan y justificar porque se puede utilizar.

(1) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $Im(f) \subseteq \{z : |z - (2 + i)| = 7\}$. Probar que f es constante.

Solución:

- Considerar $g(z) = f(z) + (2 + i)$.
- Probar que $|g(z)|$ es constante.
- Utilizar que si una función holomorfa tiene modulo constante entonces es constante.
- Concluir que como g es constante entonces f es constante.

(2) Sea C una curva C^1 en $\mathbb{C}$ y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que

$$\int_C f(z)dz = -\int_{-C} f(-z)dz,$$

donde $-C$ es la curva $\{z : -z \in C\}$.

Solución:

- Fijar una parametrizacion γ de C.
- Considerar la parametrizacion $\nu = -\gamma$ de C.
- Utilizar estas dos parametrizaciones para calcular las integrales y ver que da lo que tiene que dar.

(3) Supongamos que $f(z)$ es analítica y distinta de cero en z_0 y que $g(z)$ no es analítica en z_0. Demostrar que $h(z) = f(z)g(z)$ no es analítica en z_0.

Solución:

Suponer que h es analitica y concluir que entonces $g = \frac{h}{f}$ es analitica en z_0

(4) Dado $n \in \mathbb{N}$, hallar la cantidad de soluciones para la ecuacion $3z^n = e^z$ en $\{z : |z| \leq 1\}$.

Solución:

Aplicar Rouché a la ecuacion $3z^n - e^z = 0$ tomando $f(z)+ = 3z^n$.