# 4. SOBRE RECTAS EN EL PLANO COMPLEJO

Decidir bajo qué condiciones la ecuación (E) $az + b\bar{z} + c = 0$ define una recta.Es fácil ver, considerando las partes real e imaginaria, que la ecuación (E) equivale al sistema de ecuaciones lineales reales

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + c_1 &= 0, \\ (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

El determinante de este sistema es $\delta = |a|^2 - |b|^2$. Si $\delta \neq 0$ habría solución única y se reduciría a un punto. Debe ser $|a|^2 = |b|^2 > 0$ pues sino o bien no habría soluciones (si $c \neq 0$) o todo número complejo sería solución (si $c = 0$). Siendo $\delta = 0$ las columnas de la matriz asociada al sistema anterior son linealmente dependientes, i.e. $a + b$ e $i(a - b)$ resultan linealmente independientes sobre el cuerpo de los números reales. Existe entonces un número real $\rho \neq 0$ tal que $a + b = i\rho(a - b)$, o bien $b = a(-1 + i\rho)/(1 + i\rho)$.

Recíprocamente, suponiendo que $b = a(-1 + i\rho)/(1 + i\rho)$ para cierto número real $\rho \neq 0$ es fácil ver ahora que la ecuación (E) define una recta.

En conclusión:

(E) define una recta si y solo si $b = a(-1 + i\rho)/(1 + i\rho)$ para cierto número real $\rho \neq 0$ .