ELIPSES EN EL PLANO COMPLEJO

Sea $E(a,r)=\{z\in\mathbf{Z}:|z-a|+|z+a|=r\}$, donde $a\in\mathbf{C}$ y $r>0$. Entonces $E(a,r)$ es una elipse no vacía si y solo si $|a|\le r/2$.

La condición es necesaria, ya que si existe $z\in E(a,r)$ entonces

$$2|a|=|2a|=|(a-z)+(a+z)|\le|a-z|+|a+z|=r.$$

Supongamos que $|a|\le r/2$ y veamos que $E(a,r)$ es no vacío. En particular, $E(0,r)$ es la circunferencia de centro cero y radio $r/2$ y podemos suponer $a\ne 0$. Si $r\ge 2|a|$ tenemos

$$\left|\frac{r}{2}\frac{a}{|a|}-a\right|+\left|\frac{r}{2}\frac{a}{|a|}+a\right|=|a|\left[\left|\frac{r}{2|a|}-1\right|+\left|\frac{r}{2|a|}+1\right|\right]=|a|\frac{(r/2-|a|)+(r/2+|a|)}{|a|}=r.$$