Miscelanea sobre logaritmos

Como es usual, indicamos $Log(z)$ al logaritmo principal complejo, correspondiente a la rama del argumento en el intervalo $[-\pi, \pi)$.

1) Sea $f(z) = Log(z-i)$. (a) Describiremos el corte necesario para obtener el mayor dominio de analiticidad A posible de esta función. Deberá ser $z - i \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ o sea $A = \mathbb{C}$- $\{x + i : x \leq 0\}$.
2) Por ejemplo, $f(-i) = Log(-2i) = \ln 2 - i\pi/2$.
3) Sea $g(z) = Log(z-i)/(z-2i)$. -¿Porqué hay en $2i$ una singularidad?- Pues porque es claro que esta función no es analítica en $2i$, siendo $2i$ punto de acumulación del conjunto de puntos en los que g es analítica.
4) La función $h(z) = Log(z-i)/(z+2-i)$ es analítica sobre A, ya que allí el numerador es analítico y el denominador solo se anula en $-2+i$, o sea fuera de A.
5) $-Log(z) = Log(1/z)$ sobre el máximo dominio de analiticidad $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}_{\leq 0}$ del logaritmo principal. En efecto, este dominio no contiene al cero. Dado $z \in \mathbb{C}$-$\mathbb{R}_{\leq 0}$ podemos escribir $z = re^{i\theta}$, con $r > 0$ y $|\theta| < \pi$. Luego $1/z = r^{-1}e^{-i\theta}$ y
$$Log(1/z) = \ln r^{-1} - i\theta = -\ln r - i\theta = -Log(z).$$
6) Consideremos la rama no principal del logaritmo correspondiente a la función argumento en el intervalo $[0, 2\pi)$. En el máximo dominio de analiticidad de esta rama la identidad anterior no es cierta. Precisamente, ahora $z = re^{i\theta}$, con $r > 0$ y $0 < \theta < 2\pi$. Pero $Log(z) = \ln r + i\theta$ y $Log(1/z) = \ln r^{-1} + i(2\pi - \theta)$ pues $0 < 2\pi - \theta < 2\pi$ y la afirmación sigue enseguida.
7) Establezcamos el máximo dominio de analiticidad de $k(z) = Log[(z-1)/z]$. Evidentemente deberá ser $z \neq 0$. Entonces, puesto que
$$(z-1)/z = \frac{x - 1 + iy}{x + iy} = \frac{x(x-1) + y^2 + iy}{x^2 + y^2}$$
la función k no será analítica solo si $y = 0$ y $x(x-1)/(x^2 + y^2) \leq 0$, i.e. si y solo si $y = 0$ y $0 < x \leq 1$. En definitiva, el máximo dominio de analiticidad de k es $\mathbb{C}$-[0,1].
8) Ídem para la función $l(z) = Log(z^2 + 1)$. Ahora $z^2 + 1 = x^2 - y^2 + 1 + 2xyi$, resultando l no analítica si $xy = 0$ y $x^2 - y^2 + 1 \leq 0$. Deducimos que el máximo dominio de analiticidad de l es $\mathbb{C}$- $\{iy : |y| \geq 1\}$.
9) Ídem para la función $m(z) = Log(Log(z))$. Por un lado, el logaritmo principal es analítico en el dominio $\mathbb{C}$-[$-\infty, 0$]. Además $\mathrm{Re}[Log(z)] = 0$ si y solo si $z \in \mathbb{R}^+$,

mientras que $\mathrm{Im}[Log(z)] \le 0$ si y solo si $|z| \le 1$. Así debe ser $z \in$ ℂ-[$-\infty, 0$] $\cap$ ℂ- $(0,1]$, de donde el máximo dominio de analiticidad de m es ℂ-[$-\infty, 1$] .

10) Ídem para la función $n(z) = Log[m(z)]$.

Deberá ser $m(z) \notin [-\infty, 0]$. La determinación principal del argumento es:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan(y/x) & si \quad x > 0 \\ \pi/2 & si \quad x = 0 < y \\ \pi + \arctan(y/x) & si \quad x < 0 < y \\ -\pi/2 & si \quad x = 0 > y \\ -\pi + \arctan(y/x) & si \quad x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Ahora, $\mathrm{Im}[m(z)] = 0$ si y solo si $\arg[Log(z)] = 0$. Deducimos que esto solo ocurre cuando $\arctan[\arg(z)/\ln(|z|)] = 0$ y $|z| > 1$, o bien si $z \in (1, \infty]$. Por otro lado, $\mathrm{Re}[m(z)] < 0$ si y solo si $\ln|Log(z)| < 0$, o sea si $z < e$. Luego el máximo dominio de analiticidad de n es ℂ-[$-\infty, 1$] $\cap$ ℂ-[1,e] = ℂ-[$-\infty, e$].