5. ORTOCENTROS

Determinemos el ortocentro de un triángulo de vértices $a,b,c,$ o sea la intersección de sus alturas. La altura correspondiente al vértice a será $a+i(b-c)r,$ donde r es un parámetro real. En efecto, basta notar que la recta que contiene los vértices b y c es paralela a la recta por el orígen generada por $b-c,$ y la perpendicular a esta última es la recta por el orígen generada por $i(b-c)$. Análogamente se determinan las otras dos alturas.

Veamos que existen números reales r,s,t que determinan el ortocentro

$$\Theta = a+i(b-c)r = b+i(a-c)s = c+i(a-b)t.$$

Precisamente, identificando $i(b-c)$ e $i(a-c)$ con $(-b_2+c_2, b_1-c_1)$ y $(-a_2-c_2, a_1-c_1)$ en el plano real, estos vectores resultan linealmente independientes. Deducimos que hay únicos escalares reales r,s tales que $a-b=-i(b-c)r+i(a-c)s.$ Luego, la existencia de t sigue del hecho que $a \neq b.$ Queda probada la existencia del ortocentro.

Ahora, como $a-c+i(b-c)r = b-c+i(a-c)s$ resulta $(b-c)(1-ir)=(a-c)(1-is).$ O sea

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{1-ir}{1-is} = \frac{1+rs+i(-r+s)}{1+s^2}.$$

Escribiendo $\rho = \mathrm{Re}[(a-c)/(b-c)]$ e $\imath = \mathrm{Im}[(a-c)/(b-c)]$ será

$$\rho = \frac{1+rs}{1+s^2} \text{ e } \imath = \frac{-r+s}{1+s^2}.$$

Así

$$\rho(1+s^2) = 1+rs = 1+[s-(1+s^2)\imath]s = (1+s^2)(1-s\imath)$$

y $\rho = 1-s\imath.$ Si $\imath = 0$ deberá ser $r=s$ y $\rho = 1.$ Pero entonces $(a-c)/(b-c)=1$, lo que no es posible porque $a \neq b.$ Luego $\imath \neq 0$ y

$$s = \frac{1-\rho}{\imath} = \frac{\mathrm{Re}[(b-a)/(b-c)]}{\mathrm{Im}[(a-c)/(b-c)]}.$$

En definitiva,

$$\Theta = b+i(a-c)\frac{\mathrm{Re}[(b-a)/(b-c)]}{\mathrm{Im}[(a-c)/(b-c)]}.$$