10. INTEGRALES REALES

1. Dados $a > 0, \nu > 0$ veremos que $\int_0^{\infty} Log \dfrac{a^2 + x^2}{x^2} \cos(\nu x) = \dfrac{\pi}{\nu}\left(1 - e^{-a\nu}\right).$

Para ello integraremos la función $F(z) = \exp(i\nu z) Log \dfrac{a^2 + z^2}{z^2}$ sobre la curva Γ_R, donde $R > 0,$ formada por el arco de círculo $|z| = R$ en el primer y segundo cuadrante, la poligonal que une los puntos $-R, '-1/R$ y $-1/R + ia,$ el arco de círculo superior centrado en ia que une los puntos $-1/R + ia$ y $1/R + ia$ y la poligonal que une $1/R + ia, 1/R$ y $R.$ De esta manera el recorrida evita pasar por los puntos en los que F no está definida.

Respecto al logaritmo, consideraremos los cortes $(-\infty, 0]$ y $(-i\infty, ia],$ con las determinaciones del argumento $-\pi \le \arg(z) < \pi$ y $-\pi/2 \le \arg(z) < 3\pi/2$ respectivamente. Por el teorema de Cauchy tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_R} F(z)dz \\ &= \int_0^{\pi} F(\mathrm{Re}^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta + \int_{-R}^{-R^{-1}} F(x)dx + i\int_0^a F(-R^{-1} + it)dt \\ &\quad - \int_0^{\pi} F(ia + R^{-1}e^{i\sigma}) R^{-1} ie^{i\sigma} d\sigma - i\int_0^a F(R^{-1} + i(a-t))dt + \int_{R^{-1}}^{R} F(x)dx. \end{aligned}$$

Para $\theta \in (0, \pi)$ tenemos

$$\left|F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\mathrm{Re}^{i\theta}\right| = e^{-\nu R\sin\theta} R \left|\ln\left|1 + (a/\mathrm{Re}^{i\theta})^2\right| + i\arg(1 + (a/\mathrm{Re}^{i\theta})^2)\right| \le R\frac{\sqrt{\ln^2(1 + (a/R)^2) + \pi^2}}{\exp(\nu R\sin\theta)}.$$

Haciendo $R \to \infty$ la expresión de la derecha converge a cero. Más aún, si para $n \in \mathbf{N}$ escribimos

$$f_n(\theta) = n\sqrt{\ln^2(1 + (a/n)^2) + \pi^2}\,\exp(-\nu n\sin\theta)$$

Vemos que $0 \le f_n(\theta) \le \sqrt{\ln^2(1 + a^2) + \pi^2}$ y $\lim_{n\to\infty} f_n(\theta) = 0.$ Como se trata de una sucesión de funciones continuas acotadas e integraremos sobre un intervalo cerrado y acotado es $\lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} F(\mathrm{Re}^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta = 0.$

Análogamente, $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} F(ia + R^{-1}e^{i\sigma}) R^{-1} ie^{i\sigma} d\sigma = 0.$

Además, razonando como
antes

$$i\int_0^a F(-R^{-1}+it)dt = i\int_0^a e^{i\nu(-1/R+it)}(\ln\left|\frac{a^2+1/R^2-2it/R-t^2}{1/R^2-2it/R-t^2}\right| + i\arg\frac{a^2+1/R^2-2it/R-t^2}{1/R^2-2it/R-t^2})dt,$$

de donde $\lim_{R\to+\infty} i\int_0^a F(-1/R+it)dt = i\int_0^a [\ln((a/t)^2-1)+3\pi i/2]e^{-\nu t}\,dt.$

Análogamente, $\lim_{R\to+\infty}(-i)\int_0^a F(1/R+i(a-t))dt = -i\int_0^a [\ln((a/(a-t))^2-1)-\pi i/2]e^{-\nu(a-t)}\,dt.$

En consecuencia,

$$0 \;=\; VP\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx + i\int_0^a [\ln((a/t)^2-1)+3\pi i/2]\,e^{-\nu t}\,dt - i\int_0^a [\ln((a/(a-t))^2-1)-\pi i/2]e^{-\nu(a-t)}\,dt,$$

de modo que

$$VP\int_{-\infty}^{\infty} Log\frac{a^2+x^2}{x^2}\cos(\nu x) = \frac{3\pi}{2}[\frac{e^{-\nu t}}{-\nu}]_0^a + \frac{\pi e^{-\nu a}}{2}[\frac{e^{\nu t}}{\nu}]_0^a = \frac{2\pi}{\nu}(1-e^{-\nu a}).$$

Puesto que el integrando es par sigue la afirmación.