Final de Análisis Matemático III- Variable Compleja

1. Supongamos que $f(z) = u(z) + iv(z)$ y $g(z) = 2v(z) + 3iu(z)$ son funciones holomorfas en un cierto dominio D. Probar que ambas f y g son constantes.

2. Probar que $\operatorname{sen} z$ no es acotada en todo el plano complejo

3. a) Describa el tipo de singularidades que pueden aparecer en una función de variable compleja y cómo se caracterizan. Encuentre y clasifique las singularidades en el **plano complejo extendido** de $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3 - 2z^2 - 7z - 4}$.

   b) Calcule $\displaystyle\int_{|z|=1/3} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3 - 2z^2 - 7z - 4} dz$.Enuncie el teorema que ha usado para este cálculo.

   c)Calcule $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3 - 2z^2 - 7z - 4} dz$.Enuncie el teorema que ha usado para este cálculo.

4. a) ¿Cuáles de las siguientes funciones son armónicas?. ¿En qué dominios?

   a.1) $6x^2y^2 - x^4 - y^4 + x - y + 1$ a.2) x^2y

5. Encontrar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = e^{z-1} \cos \dfrac{1}{z-1}$. Determine el máximo dominio de validez de este desarrollo.

Final de Análisis Matemático III- Variable Compleja. Cursada 2009.

Todos los ejercicios deberán estar debidamente fundamentados.

1. (1,50p) Sea Ω un dominio y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Supongamos que $2 \operatorname{Re} f(z) + 4 \operatorname{Im} f(z) = 1 \ \forall z \in \nleq$. Probar que f es costante en Ω.

2. (2,50p) a) Encuentre el máximo dominio de analiticidad de $\operatorname{Log}(z - 4i)$

   b) Calcular $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{Log}(z - 4i)}{(z+1)(z^2+25)} dz$. Enuncie el teorema que ha usado para este cálculo.

3. (2,50p) a) Describa el tipo de singularidades que pueden aparecer en una función de variable compleja y cómo se caracterizan. Encuentre y clasifique las singularidades en el plano extendido de $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-1)^2 (z+3)^4}$.

   b) Calcule $\displaystyle\int_{|z|=2} e^{1/z} dz$.Enuncie el teorema que ha usado para este cálculo.

4. (2p) Sea Ω dominio simplemente conexo $F : \Omega \to \mathbb{C}$ derivable con derivada continua en todo Ω. Probar que $\displaystyle\int_\gamma F'(z)\ dz = 0$ para toda curva cerada simple diferenciable a trozos γ.

5. (1,50p) Encuentre el número de raíces del polinomio $z^5 + z^2 + z - 1$ que se encuentran en $|z| \leq 2$.Enuncie el teorema que ha usado.

Final de Análisis Matemático III-Variable Compleja. 7/09/2009

1. (2p) Sea $f(z)$ es analítica en un dominio D y que satisface la desigualdad $|f(z)-1|<1$ en D. Probar que $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=0$

2. (2,50p)a) Encuentre el máximo dominio de analiticidad de $\mathrm{Log}(iz+1)$.Justifique

   b) Calcule $\displaystyle\int_{|z+6i|=1}\frac{\mathrm{Log}(iz+1)}{z-5}dz$.Justifique. En caso de usar algún teorema enúncielo.

3. (2,50p) a) Describa el tipo de singularidades que pueden aparecer en una función de variable compleja y cómo se caracterizan. Encuentre y clasifique las singularidades en el plano complejo de $f(z)=\dfrac{\operatorname{sen}1/z}{(z-i)^4\,(z+3)^4}$.

   b) Calcule $\displaystyle\int_{|z|=2}\left[\frac{1}{(z-1)^2}+\operatorname{sen}\frac{1}{z}\right]\,dz$.Enuncie el teorema que ha usado para este cálculo.

4. (1,50p) ¿Cuál de las siguientes funciones son armónicas? En caso afirmativo, calcular la función conjugada armónica:

   a) $\operatorname{senh}x\cosh y$; *b*) $x^4-6x^2y^2+y^4$

5. (1,50p) Probar que la función compleja $f(z)=\cos z$ no es acotada en todo el plano complejo. Justifique. En caso de usar algún teorema enúncielo.

Final de Análisis matemático III. febrero de 2010. Cursada 2006-2008

1. Sea $f(z)=10^{e^z}$, calcule de modo tal que $\left|f(i\frac{\pi}{2})\right|=e^{-2\pi}$. Hallar $f'(z)$ y $f'(i\frac{\pi}{2})$.

2. determine los valores de k tales que $f(x,y)=k^2x^2y-3y^3$ sea armónica. Hallar entonces la conjugada armónica g de $f/\ g(0)=1$.

3. Calcular $I=\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{\sin z}{\sinh^2 z}dz$.

4. Hallar los valores de z para los que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,n!\,(z^2+2z+2)^{2n}$ converja