Análisis III
Examen Final

1. Sea $u(x, y) = y^3 - 3x^2y + 2x^2 - 2y^2 - 3x + 1$.
(a) Mostrar que u es la parte real de una función holomorfa.
(b) Encontar una función $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(z) + iv(z)$ es holomorfa y escribir f como un polinomio en z.

2 Sea C la frontera del cuadrado con vertices $3, 3i, -3, -3i$ descrita en el sentido positivo.. Encontrar el valor de las integrales:
(a)

$$\int_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{iz(z^2 - 4z + 4)}$$

(b)

$$\int_C z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

3 Sea

$$f(z) = \frac{5}{(z^2 + 1)(z^2 - 4)}.$$

Encontrar la serie de Laurent en potencias de z para $1 < |z| < 2$

4 Calcular

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)dx}{x^2 + 1}$$

5 Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Supongamos que $f : D \to \mathbb{C}$ es holomorfa y que $f(z) = 1$ si la parte imaginario de z es zero. Probar que $f(z) = 1$ para cada $z \in D$.