

## Análisis III Examen Final

1. Sea  $u(x, y) = y^3 - 3x^2y + 2x^2 - 2y^2 - 3x + 1$ .

(a) Mostrar que  $u$  es la parte real de una función holomorfa.

(b) Encontrar una función  $v(x, y)$  tal que  $f(z) = u(z) + iv(z)$  es holomorfa y escribir  $f$  como un polinomio en  $z$ .

2 Sea  $\text{Log}(z)$  la rama principal del logaritmo. Para

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

mostrar que  $\text{Log}(z^5) \neq 5\text{Log}(z)$

3 Sea  $C$  la frontera del cuadrado con vértices  $\pm 1$  y  $\pm i$  descrita en el sentido positivo. Encontrar el valor de las integrales:

(a)

$$\int_C \frac{\exp(2z)dz}{z^4}$$

(b)

$$\int_C \frac{\text{sen}(z)dz}{z(z - \frac{\pi}{6})}$$

4 Sea

$$f(z) = \frac{1}{(3-z)(z-2)}.$$

Encontrar la serie de Laurent en potencias de  $z$  para  $2 < |z| < 3$

5 Calcular

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)dx}{(x^2 + 1)^2}$$