

Análisis III Examen Final

1(a) Sea $f(z) = \exp(\bar{z})$. Existe la derivada $f'(z)$ en algún punto z ? Mostrar trabajo.

(b) Definir

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} & z \neq 0 \\ i & z = 0 \end{cases} .$$

Es g holomorfa en el punto 0?. Explicar.

2(a) Encontrar todos los posibles valores de i^{-i} .

(b) Si

$$\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$$

encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}.$$

3 Sea C la frontera del cuadrado con vértices $\pm 2 \pm 2i$ descrita en el sentido positivo. Encontrar el valor de las integrales:

(a)

$$\int_C \frac{\cos(z)}{z(z^3 + 27)}$$

(b)

$$\int_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^4}$$

4 Sea

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}.$$

Encontrar la serie de Laurent en potencias de z para las zonas

(a) $0 < |z| < 1$

(b) $1 < |z|$

5 Calcular

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1}$$