

Análisis III Examen Final

1 Sea $f(x, y) = x^2 + iy^2$

(a) Encontrar los puntos $z = x + iy$ en el plano complejo donde la derivada $f'(z)$ existe.

(b) Es f holomorfa en algún punto? Explicar tu respuesta claramente.

2(a) Encontrar todos los posibles valores de i^{-i} .

(b) Sea $\text{Log}(z)$ la rama principal del logaritmo. Para

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

mostrar que $\text{Log}(z^5) \neq 5\text{Log}(z)$

3 Sea C la frontera del cuadrado con vértices $2, 2i, -2, -2i$ descrita en el sentido positivo. Encontrar el valor de las integrales:

(a)

$$\int_C \frac{\exp(2z)dz}{z^4}$$

(b)

$$\int_C \frac{\text{sen}(z)}{iz(z^2 - 1)}$$

4 Sea

$$f(z) = \frac{1}{(3-z)(z-2)}.$$

Encontrar la serie de Laurent en potencias de z para $2 < |z| < 3$

5 Calcular

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)dx}{(x^2 + 1)^2}$$